Recuperación resiliente de redes caóticas estocásticas de cadenas de suministro mediante control tipo PIN

Resilient Recovery on Stochastic Chaotic Supply Chain Networks Using Pinning Control

PhD. Carlos Jesús Vega Pérez[1], **PhD. Jesús Alfonso Medrano Hermosillo**[2], **PhD. Oscar Javier Suarez Sierra**[3]

[1] **Universidad Santo Tomas,** Facultad de Estadística**,** Bogotá, Cundinamarca, Colombia.

[2] **Tecnológico Nacional de México/IT Chihuahua,** División de Estudios de Posgrado e Investigación (DEPI), Chihuahua, México.

[3] **Universidad de Pamplona,** Facultad de Ingenierías y Arquitectura, Ingeniería Mecatrónica, Pamplona, Norte de Santander, Colombia.

Correspondencia: oscar.suarez@unipamplona.edu.co

Recibido: 11 julio 2026. **Revisado:** 18 agosto 2026. **Aceptado:** 02 octubre 2026. **Publicado:** 06 noviembre 2026.

Cómo citar: C. J. Vega Perez, J. A. Medrano Hermosillo, y O. J. Suarez Sierra, "Recuperación resiliente de redes caóticas estocásticas de cadenas de suministro mediante control tipo PIN", *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada (RCTA)*, vol. 2, no. 48, pp. 273–281, nov. 2026, doi: 10.24054/rcta.v2i48.4705

Esta obra está bajo una licencia internacional
Creative Commons Atribución-NoComercial 4.0.

Resumen: En este artículo se propone un novedoso esquema de control tipo PIN para alcanzar la sincronización en una red de cadena de suministro, concebida como un sistema dinámico compuesto por empresas miembro con comportamientos dinámicos y diversas relaciones empresariales. En este estudio se considera que la red está sujeta a dos tipos distintos de ruido y/o incertidumbre, modelados mediante variables estocásticas, y que la dinámica interna de las empresas es caótica. El objetivo principal del esquema propuesto es lograr la recuperación resiliente de una red de cadena de suministro afectada por disrupciones. Asimismo, se ilustra la eficacia del enfoque mediante un caso real de red de cadena de suministro.

Palabras clave: Recuperación resiliente, red de cadena de suministro, red compleja estocástica, control tipo PIN, sistema caótico.

Abstract: In this paper, a novel pinning control scheme is proposed to achieve synchronization in a supply chain network, which is regarded as a dynamic system consisting of member companies with dynamic behaviors and different enterprise relations. This study considers that the network is influenced by two different noises and/or uncertainties modeled through stochastic variables and the internal dynamics in the companies are chaotic. The main objective of the proposed scheme is to achieve the resilient recovery of a disrupted supply chain network. Moreover, we illustrate the effectiveness of the approach by means of a real case supply chain network.

Keywords: Resilient recovery, supply chain network, stochastic complex network, pinning control, chaotic system.

1. INTRODUCCIÓN

Las redes complejas nos han permitido describir muchos sistemas omnipresentes en la naturaleza y la sociedad, como las redes biomoleculares, las redes neuronales, la propagación de enfermedades infecciosas, las relaciones sociales, la World Wide Web, las redes eléctricas, entre otros [1]–[3]. Un comportamiento interesante y común que se presenta en estas redes es la sincronización de la red [4]–[6]. Se han propuesto diferentes enfoques para estudiar la sincronización de redes dinámicas complejas sin control [7]–[9].

Una red compleja común puede ser el proceso de la cadena de suministro, compuesto por varios tipos de actores denominados clientes, empresas, proveedores, entre otros, que tienen sus propios objetivos, los cuales generalmente no están alineados con las metas de la empresa [10]. La alta complejidad de los procesos de la cadena de suministro se debe a las numerosas interconexiones entre nodos y al dinamismo de los eventos, que dificultan predecir el comportamiento futuro. Cuando ocurre un evento disruptivo en una red de cadena de suministro, dada la complejidad de la estructura de la red, existe una gran necesidad de desarrollar estrategias que permitan restablecer el sistema a su operación normal [11]. Tales disrupciones son causadas por eventos impredecibles como epidemias, desastres y/o ataques terroristas, que aumentan las pérdidas económicas y operativas [12]. Se han propuesto algunos resultados para las redes de cadena de suministro en el marco de las redes dinámicas complejas [13], [14]. Geng y Xiao proponen un método de recuperación resiliente basado en la sincronización para una red de suministro determinista [13]; los mismos autores amplían este trabajo para analizar medidas de recuperación resiliente basadas en la sincronización con memoria y control, identificando las estructuras troncales [14]. El control tipo PIN es una técnica utilizada para lograr un comportamiento colectivo deseado cuando una red no puede alcanzarlo por sí misma. Esta técnica es muy conveniente para sistemas de gran tamaño, es decir, con un gran número de nodos (como las redes de cadena de suministro presentadas anteriormente), dado que el enfoque de esta técnica consiste en aplicar señales de control de manera apropiada a una pequeña fracción de los nodos de la red [15]–[17]. El objetivo principal de esta técnica es encontrar un número determinado y una ubicación adecuada de los nodos que se fijarán para alcanzar el objetivo de control de manera efectiva.

Este tipo de enfoque se basa en la dinámica de los nodos y la topología de la red, así como en la evolución de la red. En consecuencia, desde el primer trabajo propuesto en el diseño de controladores tipo PIN [18], [19], se han desarrollado muchos esfuerzos de investigación para analizar este tema, que incluyen condiciones de estabilidad, sincronización completa, sincronización por conglomerados, estrategias selectivas para los nodos fijados, propiedades de controlabilidad y el diseño de diferentes metodologías de control, con el propósito de extender el análisis de control clásico a las redes complejas [20]–[24].

Como puede observarse, se han logrado muchos avances en el control tipo PIN de sistemas complejos en red. Sin embargo, la mayoría se enmarca en sistemas deterministas libres de ruido. Un área con gran potencial que presenta un gran desafío son las redes complejas estocásticas. Estos sistemas han recibido mucha atención debido a su amplia aplicabilidad en numerosas áreas de la ingeniería, en sistemas que experimentan fuerzas del viento, excitación sísmica, fluctuaciones de la corriente eléctrica debidas al ruido térmico, manchas solares en modelos económicos y cualquier otra variable aleatoria [25], lo que permite obtener modelos más confiables.

Se han realizado diversas investigaciones en el marco de las redes complejas estocásticas [26]–[31]. El problema de la sincronización estocástica se aborda en [26] y [27] para el caso de redes dinámicas complejas con retardos y nodos no idénticos. La sincronización impulsiva se analiza en [28] para redes con retardos de tiempo y topologías conmutadas. En [29] se derivan condiciones suficientes para la sincronización global. En [30] se analizan individualmente tres tipos diferentes de procesos de difusión de ruido que afectan a la red compleja y se derivan condiciones para la controlabilidad por fijación, suponiendo que la ley de control tiene la misma forma que la función de acoplamiento. Utilizando el enfoque de la función de estabilidad maestra, se proporcionan condiciones necesarias y suficientes localmente para la sincronización [31].

Con las motivaciones anteriores, este artículo aborda el problema de la sincronización estocástica global mediante una ley de control tipo PIN aplicada a procesos caóticos estocásticos de la cadena de suministro para garantizar la recuperación resiliente. Se tienen en cuenta los efectos causados por dos tipos diferentes de procesos de difusión de ruido. Se

proporciona la síntesis completa del controlador tipo PIN, en la cual se desarrolla una metodología para la selección de los nodos controlados, la intensidad de acoplamiento mínima requerida y la cota de la ley de control tipo PIN para alcanzar el objetivo de control. Se utiliza el caso de una red de cadena de suministro europea para ilustrar la eficacia del esquema propuesto, donde los flujos entre las partes interesadas se representan mediante enlaces de comunicación con ruido, y la dinámica empresarial se considera caótica y estocástica.

Notación: I_n representa la matriz identidad de $n \times n$. $A > 0$ ($A < 0$) significa que A es definida positiva (negativa). A^{T} es la transpuesta de la matriz A. $\|\cdot\|$ denota la norma de operador. $\mathrm{Tr}\{A\}$ es la traza de una matriz cuadrada $A = (a_{ij})_{d\times d}$, es decir, $\mathrm{Tr}\{A\} = \sum_{i=1}^{d} a_{ii}$. $\lambda_{\min}(\cdot)$ ($\lambda_{\max}(\cdot)$ representa el valor propio más pequeño (más grande) de la matriz correspondiente. $f : A \to B$ es la aplicación f de A a B. $A \otimes B$ representa su producto de Kronecker con las siguientes propiedades:

1) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$
2) $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B)$
3) $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$
4) $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$

2. FUNDAMENTOS

2.1. Modelo de red de cadena de suministro caótica estocástica

Se propone un modelo matemático para redes de cadena de suministro caóticas estocásticas utilizando el marco de las redes complejas [15]. Considérese una red general compuesta por N nodos idénticos acoplados de forma difusiva sobre un grafo no dirigido $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, donde $\mathcal{V} = \{v_i\}$ es el conjunto de nodos de empresas involucradas en la red (proveedores, fábricas, distribuidores); $\mathcal{E} = \{e_{ij}\}$ es el conjunto de relaciones entre oferta y demanda, que representan los diferentes flujos entre las empresas (nodos). La dinámica de la red se describe mediante el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales estocásticas no lineales de tipo Itô:

$$\mathrm{d}x_i = (f(x_i) - c\sum_{j=1}^{N} L_{ij}h(x_j) + u_i)\mathrm{d}t$$

$$+ \sigma_m g(x_i)\mathrm{d}b_m + \sigma_c \sum_{j=1}^{N} L_{ij}^{*} h(x_j)\mathrm{d}b_c$$

$$i = 1, 2, \ldots, N, \qquad (1)$$

donde $x_i = [x_{i1}, \ldots, x_{in}]^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^n$ es el vector de estados del nodo i; $f, h : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ son los campos vectoriales dos veces diferenciables que describen la dinámica individual determinista y la función de acoplamiento de salida, respectivamente; $L = [l_{ij}] \in \mathrm{R}^{N\times N}$ es la matriz laplaciana que describe la configuración de la red, cuando existe una relación comercial entre el nodo de empresa i y j, $l_{ij} = 1$, en caso contrario $l_{ij} = 0$; $c > 0$ es la intensidad de acoplamiento entre nodos vecinos; u_i es la entrada de control. $\sigma_m g(x_i)\mathrm{d}b_m$ representa la incertidumbre del modelado o la dinámica ruidosa de las empresas, con b_m siendo un proceso de Wiener unidimensional, σ_m modulando su varianza, y $g : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$ siendo la función de difusión no lineal; finalmente, el término $\sigma_c\sum_{j=1}^{N} l_{ij}h(x_j)\mathrm{d}b_c$ representa las incertidumbres de los flujos o el ruido presente en los flujos, con b_c siendo un proceso de Wiener unidimensional, independiente de b_m, y σ_c modulando su intensidad.

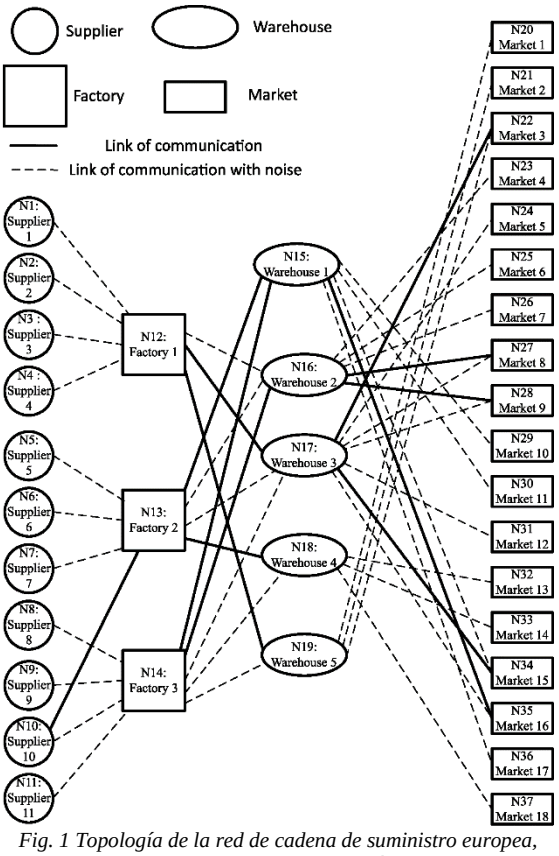


Fig. 1 Topología de la red de cadena de suministro europea, incluyendo el enlace de comunicación con ruido.
***Fuente:** Autores.*

La topología de la red de cadena de suministro considerada para el presente estudio, tal como se presenta en la Fig. 1, describe una cadena de suministro clásica en la cual las materias primas y

las piezas son adquiridas a un conjunto de proveedores, que envían estos materiales a nodos de plantas de producción representados por las fábricas. Los bienes producidos se envían luego a centros de distribución donde se realizan tareas de recolección, empaque, distribución y transporte para preparar y transportar los pedidos a las ubicaciones de los clientes en los mercados.

2.2. Modelo de dinámica de los nodos

Se modelan tres procesos dinámicos de negocio diferentes en cada empresa. En el caso de los proveedores, cada empresa tiene una capacidad de distribución en términos del número de unidades que puede enviar a las ubicaciones de las plantas de producción, una ubicación geográfica determinada que fija las características de los tiempos y costos de viaje, los cuales a su vez afectan los tiempos de entrega de la distribución, y los contratos comerciales vigentes que vinculan a los proveedores con determinadas plantas de distribución. El número de nodos de fábrica y sus conexiones son fijos. Estos atributos tienen un impacto en parámetros del sistema como el nivel de servicio, considerado en este estudio como la insatisfacción de los pedidos en el período anterior, el grado de distorsión de la información y el inventario de seguridad. El aumento de los tiempos de entrega podría conducir a una reducción de los niveles de servicio, y los efectos látigo causados por la distorsión de la información y los retrasos podrían conducir a un aumento de los inventarios de seguridad en toda la red, incrementando los costos, por ejemplo.

Para cada tipo de nodo de la red existen condiciones de planificación de la gestión logística que determinan las cantidades de pedido que realiza cada nodo, los niveles de inventario establecidos y el número de unidades enviadas. Las plantas de producción también tienen una capacidad fija en términos del número de unidades que pueden producir y enviar, una ubicación determinada y una conexión con los centros de distribución. La variabilidad de la demanda puede afectar los programas de producción, lo que a su vez repercute en el nivel de servicio y en los costos de la política de gestión de inventarios. La capacidad de las operaciones de distribución también se describe mediante las cantidades y frecuencias que cada nodo puede proporcionar. En esta etapa pueden utilizarse diferentes tipos de proveedores de operaciones logísticas, lo que también introduce un nivel adicional de ruido en los tiempos de entrega, los costos y el nivel de servicio.

En general, el estado de cada empresa (nodo), x_i, en una red de suministro está dado por: la cantidad de demanda para pedidos (x_{i1}), la cantidad de suministro para distribución (x_{i2}) y el inventario para producción (x_{i3}), es decir, $x_i = [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}]$. Los parámetros del sistema son: la insatisfacción de los pedidos (d_{SC}) en el período anterior, el grado de distorsión de la información (r_{SC}) y los coeficientes de inventario de seguridad (c_{SC}). La dinámica de los nodos, $f(x_i(t), t)$, puede formularse como en [13], [32], donde se utiliza el sistema de Lorenz [33] para representar el comportamiento dinámico del negocio en cada empresa:

$$f(x_i) = \begin{bmatrix} d_{\mathrm{SC}}(x_{i2} - x_{i1}) \\ r_{\mathrm{SC}}x_{i1} - x_{i2} - x_{i1}x_{i3} \\ x_{i1}x_{i2} - c_{\mathrm{SC}}x_{i3} \end{bmatrix}.$$

Los parámetros del sistema se seleccionan como $a_{\mathrm{SC}} = 10$, $b_{\mathrm{SC}} = 28$ y $c_{\mathrm{SC}} = 8/3$, para asegurar el comportamiento caótico de las cadenas de suministro.

2.3. Objetivo de control de la red

2.3.1. Disrupción de la red: La disrupción en la red de cadena de suministro considerada en este estudio puede adoptar diferentes formas. Una fuente de disrupción podría ser los cambios en la distribución de los parámetros debidos a cambios del mercado. Otra fuente de disrupción pueden ser las reducciones de la capacidad de los nodos debidas a eventos externos como desastres naturales, huelgas, razones políticas que bloquean el comercio internacional, ataques terroristas o eventos disruptivos globales como la actual pandemia de Covid-19. Finalmente, los cambios en la topología de la red, en términos de la reducción o el aumento del número de nodos o de enlaces de conexión en la red, también pueden ser una fuente de disrupción. Estos eventos pueden ser causados por los eventos externos mencionados anteriormente, por crisis financieras o por otros. Podrían adoptar la forma de ciertos nodos de alta capacidad que son reemplazados por varios otros de menor capacidad, operadores logísticos que gestionan un subconjunto diferente de enlaces, o cambios en los acuerdos comerciales entre socios. Las operaciones de planificación y los procesos de gestión de la distribución determinan el número de unidades que cada nodo ordena a los niveles previos, las políticas internas de gestión de inventarios y las cantidades a enviar por cada canal de distribución. Estas operaciones dependen de pronósticos de la demanda, que son menos precisos cuando se trata de demandas estocásticas. También dependen de parámetros como los tiempos de viaje, los tiempos

de entrega y los costos, que no solo son estocásticos en este tipo de redes complejas, sino que, cuando se ven afectados por los problemas mencionados anteriormente, tienen un impacto disruptivo en la red.

2.3.2. Recuperación resiliente de la red: La recuperación resiliente de la red se representa como el retorno al nivel de desempeño deseado o al estado programado después de una disrupción. Podemos relacionar esta propiedad con la sincronización de toda la red de la siguiente manera.

Definición 1: La recuperación resiliente es el proceso de sincronización entre la red y la red programada.

Por lo tanto, el objetivo de control de $u_i(t)$ se define como forzar a (1) a sincronizarse con una trayectoria de referencia de un nodo aislado, el fijador, $x_r = x_r(t)$, cuya dinámica está dada por

$$\mathrm{d}x_r = f(x_r)\mathrm{d}t + \sigma_m g(x_r)\mathrm{d}b_m. \qquad (2)$$

En consecuencia, definimos el error de sincronización como

$$e = [e_1{}^{\mathrm{T}}, \ldots, e_N{}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

donde $e_i = x_i - x_r$. La dinámica del error de sincronización puede definirse para cada nodo $i \in \mathcal{V}$, combinando (1) y (2), de la siguiente manera:

$$\mathrm{d}e_i = \left(f(x_i) - f(x_r) - c\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N}} L_{ij}h(x_j) + u_i \right)\mathrm{d}t + \sigma_m\big(g(x_i) - g(x_r)\big)\mathrm{d}b_m + \sigma_c\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{N}} L_{ij}^{*}h(x_j)\,\mathrm{d}b_c \qquad (3)$$

El objetivo de control anterior puede lograrse aplicando una cantidad mínima de acciones de control por retroalimentación en los nodos de la red, lo cual se conoce como técnica de control tipo PIN [17], [18], que está dada por

$$u_i = -p_i\psi e_i, \quad u_i \in \mathrm{R}^n \qquad (4)$$

donde $p_i = 1$ para $i \in \mathrm{P} \subseteq \mathrm{V}$, mientras que es cero en caso contrario y $\psi > 0$ es una constante positiva, que es un parámetro de diseño del control. Sin pérdida de generalidad, supóngase que los primeros Q nodos están fijados con $\mathrm{Q} \leq \mathrm{N}$. Entonces, denotamos $P = (p_i\psi) \in \mathrm{R}^{\mathrm{N}\times\mathrm{N}}$ como una matriz diagonal con Q elementos ψ, y sus N - Q elementos restantes son todos cero.

Definición 2: La red controlada (1)-(4) está controlada por fijación en media cuadrática sobre $x_r(t)$ si existe una constante ψ y un conjunto de nodos fijados $\mathcal{P}$ para los cuales la solución trivial $e(t) = 0$ de la dinámica del error de sincronización (3) es globalmente exponencialmente estable en media cuadrática [34], es decir, si existen $\alpha 1, \alpha 2 > 0$ tales que, para todo $e0 \in \mathbb{R}n$, $t \in \mathbb{R}\geq 0$,

$$E[\|e(t)\|^2] \leq \alpha_1 \|e_0\|^2 exp(-\alpha_2 t)$$

Definición 3: [34, Teorema 6.2, pág. 32] Considérese una función V(e) definida positiva, radialmente no acotada y dos veces continuamente diferenciable. El operador $\mathscr{L}$ asociado a la ecuación estocástica de Itô (3) se define como:

$$\mathcal{L}V(e) = \frac{\partial V(e)}{\partial e}\phi(e) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\eta_1^{\mathrm{T}}(e)\frac{\partial^2 V(e)}{\partial e^2}\eta_1(e)\right\} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\eta_2^{\mathrm{T}}(e)\frac{\partial^2 V(e)}{\partial e^2}\eta_2(e)\right\},$$

donde

$$\varphi(e) = f(x_i) - f(x_r) - c\sum_{j=1}^{N} L_{ij}h(x_j) + u_i,$$

$$\eta_1(e) = \sigma_m\big(g(x_i) - g(x_r)\big), \text{ y}$$

$$\eta_2(e) = \sigma_c\sum_{j=1}^{N} L_{ij}^{*}h(x_j).$$

Lema 1: [35, Teorema 5.11] Si existen una función V(e) definida positiva y diferenciable, y tres escalares positivos β1, β2, β3 tales que:

$$\beta_1\|e\|^2 \leq V(e) \leq \beta_2\|e\|^2 \qquad (5a)$$

$$\mathcal{L}V(e) \leq -\beta_3\|e\|^2 \qquad (5b)$$

entonces la solución trivial del sistema (3) es estable en media cuadrática en probabilidad.

Definición 4: La red controlada (1)-(4) satisface la recuperación resiliente si la solución trivial e(t) = 0 del sistema (3) es globalmente exponencialmente estable en media cuadrática.

3. DISEÑO DEL CONTROL TIPO PIN

Teorema 1: [36] Si (i) para la red compleja controlada (1)-(4), existe una constante positiva $\theta_f > 0$ tal que $(z-y)^T(f(z)-f(y)) \leq \theta_f(z-y)^T(z-y), \forall z,y \in \mathbb{R}^n$; (ii) la función h es globalmente Lipschitz con constante θ_h y, para todo $y,z \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$, existe $0 < \theta_l \leq \theta_h$, tal que $(z-y)^T(h(z)-h(y)) \geq \theta_l(z-y)^T(z-y)$; (iii) la función g es globalmente Lipschitz con constante θ_g; (iv) se cumple la siguiente desigualdad:

$$M := (\theta_{sn} I_N - P - c\theta_l L) < 0 \qquad (6)$$

donde

$$\theta_{sn} = \theta_f + \frac{1}{2}\left(\sigma_m^2\theta_g^2 + \left(\sigma_c\theta_h\lambda_{max}(L^*)\right)^2\right),$$

entonces la red (1)-(4) está globalmente controlada por fijación en media cuadrática sobre $X_r(t)$.

La demostración completa del Teorema 1 se presenta en [36]. Un esbozo de esta demostración es el siguiente. Primero, se considera una función candidata de Lyapunov de control para la red controlada (1)-(4), como

$$V(e) = \sum_{i=1}^{N} e_i^T e_i/2.$$

Después, se aplica el operador diferencial $\mathscr{L}$ a V(e), de acuerdo con la Definición 3

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(e) = \sum_{i=1}^{N}\Bigg[& e_i^{\mathrm{T}}\Big(f(x_i) - f(x_r) - c\sum_{j=1}^{N} L_{ij}h(x_j) + u_i\Big) \\ & + \frac{\sigma_m^2}{2}\Big(g(x_i)-g(x_r)\Big)^{\mathrm{T}}\Big(g(x_i)-g(x_r)\Big) \\ & + \frac{\sigma_c^2}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{N} L_{ij}^* h(x_j)\right)^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{N} L_{ij}^* h(x_j)\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Siguiendo adecuadamente los pasos del procedimiento matemático, se obtienen las siguientes cotas:

(a)

$$\sum_{i=1}^{N} e_i^T(f(x_i) - f(x_r) + u_i) \leq e^T[(\theta_f I_N - P) \otimes I_n]e.$$

(b)

$$-\sum_{i=1}^{N} e_i^T c\sum_{j=1}^{N} L_{ij}h(x_j) \leq c\theta_l e^T(L \otimes I_n)e.$$

(c)

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_m^2}{2}\|g(x_i) - g(x_r)\|^2 \leq \frac{\sigma_m^2\theta_g^2}{2}e^T e.$$

(d)

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\sigma_c^2}{2}\|\sum_{j=1}^{N} L_{ij}^* h(x_j)\|^2 \leq \frac{1}{2}\left(\sigma_c\theta_h\lambda_{max}(L^*)\right)^2 e^T e.$$

Combinando las cotas (a)-(d), obtenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}V(e) &\leq e^T[(\theta_{sn}I_N - P - c\theta_l L) \otimes I_n]e \\ &= e^T(M \otimes I_n)e \leq \lambda_{max}(M)\|e\|^2\end{aligned}$$

Dado que $M < 0$, al seleccionar $\beta_1 = \beta_2 = 1$ y $\beta_3 = -\lambda_{max}(M)$, se cumple (5). Por lo tanto, a partir del Lema 1, podemos concluir que la solución trivial $e(t) = 0$ de la dinámica del error de sincronización (3) es estable en media cuadrática en probabilidad.

La condición (i) es un requisito común para el campo vectorial $f(\cdot,\cdot)$ en el marco de las redes complejas [22]; varios grupos de sistemas dinámicos, incluidos sistemas caóticos como el sistema de Lorenz, el sistema de Chen, el sistema de Lü y el circuito de Chua, satisfacen esta suposición. Las condiciones (ii)-(iii) son poco conservadoras y se han utilizado en la literatura sobre el control de sistemas dinámicos de redes estocásticas [30], [37]. La condición (iv) está relacionada con la estabilidad de la red, donde θ_{sn} agrupa la influencia de la dinámica de los nodos (θ_f), la dinámica del ruido ($\sigma_m\theta_g$), y el ruido presente en los flujos ($\sigma_c\theta_h\lambda_{max}(L^*)$). Adicionalmente, se observa que la topología de la red ($c\theta_l L$) afecta la estabilidad. Si la red no controlada ($\psi = 0$) no se sincroniza en el estado deseado, es posible diseñar un controlador tipo PIN basado en la condición (iv), donde el problema de control consiste en determinar la matriz de control P, es decir, determinar cuántos y cuáles nodos deben elegirse como PIN, sujeto a la condición de que la matriz característica M sea definida negativa. A continuación, recordamos una condición necesaria sobre el número Q de nodos que se fijarán, una condición necesaria sobre la ganancia de acoplamiento c y una condición suficiente sobre el parámetro ψ tal que $M < 0$.

Teorema 2: [21] Si la matriz $M_{open} = \theta_{sn}I_N - c\theta_l L$ tiene $p > Q$ valores propios no negativos, entonces, para todo $\psi \in \mathbb{R}, M \not\prec 0$.

El análisis teórico del Teorema 2 no es difícil; la demostración sigue los mismos pasos de [21, Proposición 7.1], por lo que se omite su demostración. La utilidad de este resultado es determinar la cantidad mínima de nodos fijados. Ahora, la matriz M puede descomponerse como

$$M = \begin{bmatrix} A - \psi I_Q & B \\ B^T & \widetilde{M} \end{bmatrix}$$

donde A y B son matrices con dimensiones apropiadas, y aprovechamos el complemento de Schur [38] para demostrar lo siguiente:

Lema 2: Si $\widetilde{M} < 0$ y $\psi > \lambda_{max}\left(A - B\widetilde{M}^{-1}B^T\right)$, entonces $M < 0$.

Demostración: Dado que $\psi > \lambda_{max}\left(A - B\widetilde{M}^{-1}B^T\right)$, tenemos que $A - \psi I_Q - B\widetilde{M}^{-1}B^T < 0$. Del complemento de Schur [38], la hipótesis de que $\widetilde{M} < 0$ conduce a la tesis. ■

Obsérvese que este resultado determina cómo diseñar el parámetro ψ para el controlador tipo PIN (4).

Corolario 1: Sean válidas las condiciones (i)-(iii) del *Teorema 1*. La red estocástica (1)-(4) es controlable por tipo PIN en media cuadrática sobre $x_r(t)$ si $\psi > \lambda_{max}\left(A - B\widetilde{M}^{-1}B^T\right)$, y $\theta_{sn} - c\theta_l\lambda_{min}\left(\tilde{L}\right) < 0$, donde $\tilde{L}$ es la matriz obtenida al eliminar las primeras Q filas y columnas de la laplaciana L.

Demostración: Primero, observemos que el elemento genérico ij de la matriz $M_{open} = \theta_{sn}I_N - c\theta_l L$ puede escribirse como

$$m_{ij} = \begin{cases} \theta_{sn} - c\theta_l L_{ii}, \text{ si } i = j, \\ -c\theta_l L_{ij}, \text{ en otro caso.} \end{cases} \quad (7)$$

Recordando que el elemento L_{ii} en un grafo es el grado del nodo i, definido como

$$d_i = L_{ii} = -\sum_{j=1, j\neq i}^{N} L_{ij}$$

Una condición necesaria para que M_{open} sea definida negativa es que todas sus entradas diagonales sean negativas; por lo tanto, una condición necesaria sobre la ganancia de acoplamiento c es

$$c > \frac{\theta_{sn}}{\theta_l d_i},$$

es decir,

$$c > \frac{\theta_{sn}}{\theta_l \lambda_{min}\left(\tilde{L}\right)},$$

Por los demás resultados, a partir del *Teorema 1* y el *Lema 2*, se sigue la tesis. ■

Obsérvese que el *Teorema 1* y el *Corolario 1* pueden utilizarse para evaluar la controlabilidad por fijación en media cuadrática, y se puede identificar un número suficiente de nodos que deben fijarse.

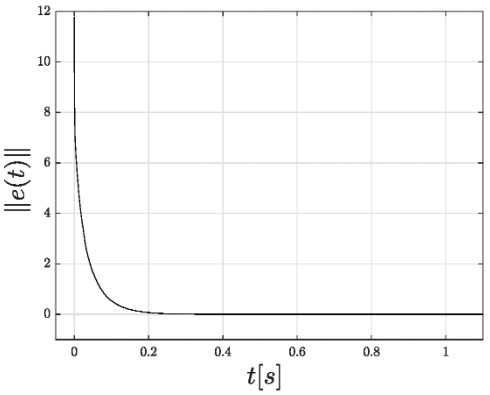


Fig. 2 *Señal temporal de la norma del error de sincronización* $\|e(t)\|$*, para toda la red de cadena de suministro.*
Fuente: *Autores.*

4. RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN

4.1. Red de cadena de suministro caótica estocástica

Las funciones de acoplamiento y de difusión se seleccionan como $h(x_i, t) = g(x_i, t) = x_i(t)$, respectivamente; la intensidad de acoplamiento es $c = 33$. La estructura de la red de cadena de suministro se basa en el caso de estudio de Cardoso et al [39], que es una red de suministro europea con 37 nodos, que incluye 11 proveedores de materia prima, 3 fábricas, 5 almacenes y 18 mercados. La topología que describe los enlaces deterministas y ruidosos entre los nodos se ilustra en la Fig. 1. Suponemos $\sigma_m = \sigma_c = 0.1$, que modulan la intensidad del ruido en la dinámica de los nodos y en los enlaces de comunicación. El objetivo de control de la señal $u_i(t)$ es sincronizar la red (1) con $x_r(t)$, que es la trayectoria de un nodo aislado.

El parámetro θ_f para este caso puede calcularse utilizando el mismo proceso de [22], $\theta_f = 28$. Adicionalmente, para la función de acoplamiento $h(x_i, t)$ obtenemos $\theta_l = 1$, $\theta_h = 1$ and $\theta_g = 1$. Obsérvese que $\lambda_{max}(L^*)^2 = 78.8$ y $\theta_{sn} = 28.4$.

Calculando la cardinalidad p del conjunto $\{\lambda \in spec(\theta_{sn}I_N - c\theta_l L) : \Re(\lambda) \leq 0\}$, el número mínimo de nodos fijados es ocho. Seleccionamos los nodos 12-19 como fijados, que corresponden a las 3 fábricas y los 5 almacenes. Con esta selección, verificamos que $\widetilde{M} < 0$ utilizando el Lema 2, tras calcular la cota del parámetro de control ψ mediante el Corolario 1, que es $\psi > 747.7$. Al seleccionar $\psi = 750$, se satisface la condición principal del Teorema 1, es decir, la matriz M es definida negativa.

La red de cadena de suministro propuesta se simula para 100 condiciones iniciales aleatorias diferentes; posteriormente, los resultados se promedian. Como se muestra en la Fig. 2, al utilizar el control tipo PIN con los parámetros de diseño, la red en lazo cerrado cumple las condiciones de estabilidad establecidas en los resultados analíticos, es decir, la norma del error de sincronización converge exponencialmente, satisfaciendo la definición de estabilidad en media cuadrática. El esquema propuesto puede ayudar a los gestores de la cadena de suministro a seleccionar las estrategias de control adecuadas para garantizar la resiliencia, permitiendo reducir los sobrecostos y satisfacer la demanda en los diferentes nodos.

5. CONCLUSIONES

Este artículo analiza cómo garantizar la recuperación resiliente de una red de cadena de suministro caótica estocástica frente a problemas de perturbación o disrupción. El modelo de red propuesto se ve afectado por dos tipos diferentes de ruido. La recuperación resiliente de la red de suministro se ha definido como el proceso de sincronización entre la red real y la red programada. Este objetivo se logra mediante una ley de control tipo PIN. Se presenta una metodología para el diseño del controlador tipo PIN. Los resultados de simulación ilustran la eficacia del enfoque propuesto.

REFERENCIAS

[1] A. Barabási y R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.

[2] S. Strogatz, “Exploring complex networks,” *Nature*, vol. 410, no. 6825, p. 268, 2001.

[3] H. Castro Silva, M. Cordero Díaz y D. Merchán Fernández, “Modelo de optimización de la red de transporte primario en el sector de alimentos en Colombia”, *RCTA*, vol. 2, no. 46, pp. 49–57, Jul. 2025, doi: 10.24054/rcta.v2i46.4073.

[4] X. Wang y G. Chen, “Synchronization in complex dynamical networks,” *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 16, no. 3, pp. 358–371, 2003.

[5] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno y C. Zhou, “Synchronization in complex networks,” *Physics Reports*, vol. 469, no. 3, pp. 93–153, 2008.

[6] F. Dörfler y F. Bullo, “Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey,” *Automatica*, vol. 50, no. 6, pp. 1539–1564, 2014.

[7] M. Li, Z. Yu, R. Zhou y Y. Zhang, “Fractional-Order Adaptive Resilient Cluster Synchronization Control of Heterogeneous Unmanned Systems Under Deception Attacks and DoS Attacks,” *Fractal and Fractional*, vol. 10, p. 343, 2026.

[8] L. Liu, M. Zhu, K. Shi, K. Tang y Y. Yang, “Resilient synchronization control for multi-agent systems under stochastic sampling-based triggering algorithm,” *Information Sciences*, p. 123996, 2026.

[9] O. Suarez, C. Vega, E. Sanchez, G. Chen, J. Elvira-Ceja, y D. Rodriguez, “Neural sliding-mode pinning control for output synchronization for uncertain general complex networks,” *Automatica*, vol. 112, p. 108694, 2026.

[10] J. Sun, J. Tang, W. Fu, Z. Chen y Y. Niu, “Construction of a multi-echelon supply chain complex network evolution model and robustness analysis of cascading failure,” *Computers & Industrial Engineering*, vol. 144, p. 106457, 2020.

[11] D. Molina Ortega, C. Pardo Beainy y E. Gutiérrez Cáceres, “Desarrollo de una estrategia de control para una válvula de autocierre en pozos de producción”, *RCTA*, vol. 2, no. 48, pp. 225–235, 2026, doi: 10.24054/rcta.v2i48.4630.

[12] Z. Liu, M. Li, Y. Lei y X. Zhai, “A joint strategy based on ordering and insurance for mitigating the effects of supply chain disruption on risk-averse firms,” *International Journal of Production Economics*, vol. 244, p. 108375, 2022.

[13] L. Geng y R. Xiao, “Outer synchronization and parameter identification approach to the resilient recovery of supply network with uncertainty,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 482, pp. 407–421, 2017.

[14] L. Geng y R. Xiao, “Control and backbone identification for the resilient recovery of a supply network utilizing outer

synchronization," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 1, p. 313, 2019.

[15] G. Chen, X. Wang y X. Li, *Fundamentals of Complex Networks*. Singapore: John Wiley & Sons, 2014.

[16] X. Wang y H. Su, "Pinning control of complex networked systems: A decade after and beyond," *Annual Reviews in Control*, vol. 38, no. 1, pp. 103–111, 2014.

[17] G. Chen, "Pinning control and controllability of complex dynamical networks," *International Journal of Automation and Computing*, vol. 14, no. 1, pp. 1–9, 2017.

[18] X. Wang y G. Chen, "Pinning control of scale-free dynamical networks," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 310, no. 3, pp. 521–531, 2002.

[19] X. Li, X. Wang y G. Chen, "Pinning a complex dynamical network to its equilibrium," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 51, no. 10, pp. 2074–2087, 2004.

[20] F. Sorrentino, M. di Bernardo, F. Garofalo y G. Chen, "Controllability of complex networks via pinning," Physical Review E, vol. 75, no. 4, p. 046103, 2007.

[21] J. Xiang y G. Chen, "On the V-stability of complex dynamical networks," Automatica, vol. 43, no. 6, pp.1049–1057, 2007.

[22] Q. Song, J. Cao y F. Liu, "Synchronization of complex dynamical networks with nonidentical nodes," Physics Letters A, vol. 374, no. 4, pp. 544–551, 2010.

[23] P. DeLellis, M. di Bernardo, F. Garofalo y M. Porfiri, "Evolution of complex networks via edge snapping," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol. 57, no. 8, pp. 2132–2143, 2010.

[24] G. Wen, W. Yu, G. Hu, J. Cao y X. Yu, "Pinning synchronization of directed networks with switching topologies: A multiple Lyapunov functions approach," IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, vol. 26, no. 12, pp. 3239–3250, 2015.

[25] V. Kulkarni, Modeling and Analysis of Stochastic Systems, 3rd ed. Boca Raton, FL, USA: Crc Press, 2017.

[26] X. Yang y J. Cao, "Finite-time stochastic synchronization of complex networks," Applied Mathematical Modelling, vol. 34, no. 11, pp. 3631–3641, 2010.

[27] X. Yang, J. Cao y J. Lu, "Stochastic synchronization of complex networks with nonidentical nodes via hybrid adaptive and impulsive control," IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, vol.59, no. 2, pp. 371–384, 2011.

[28] C. Li, W. Yu y T. Huang, "Impulsive synchronization schemes of stochastic complex networks with switching topology: average time approach," Neural Networks, vol. 54, pp. 85–94, 2014.

[29] G. Russo, F. Wirth y R. Shorten, "On synchronization in continuous-time networks of nonlinear nodes with state-dependent and degenerate noise diffusion," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 64, no. 1, pp.389–395, 2018.

[30] D. Burbano, G. Russo y M. di Bernardo, "Pinning controllability of complex network systems with noise," IEEE Transactions on Control of Network Systems, vol. 6, no. 2, pp. 874–883, 2018.

[31] F. Della Rossa y P. DeLellis, "Stochastic master stability function for noisy complex networks," Physical Review E, vol. 101, no. 5, p. 052211, 2020.

[32] U. Kocamaz, H. Taşkın, Y. Uyaroğlu y A. Göksu, "Control and synchronization of chaotic supply chains using intelligent approaches," Computers & Industrial Engineering, vol. 102, pp. 476–487, 2016.

[33] E. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 20, no. 2, pp.130–141, 1963.

[34] X. Mao, Stochastic Differential Equations and Applications, 2nd ed. Cambridge, UK: Woodhead Publishing, 2008.

[35] R. Khasminskii, Stochastic Stability of Differential Equations, 2nd ed. Berlin Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2012, vol. 66.

[36] F. Della Rossa, C. Vega y P. De Lellis, "Nonlinear pinning control of stochastic network systems,"Automatica, provisionally accepted, 2022.

[37] F. Della Rossa y P. De Lellis, "Stochastic pinning controllability of noisy complex networks," IEEETransactions on Control of Network Systems, 2020.

[38] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron y V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1994.

[39] S. Cardoso, A. Barbosa-Póvoa, S. Relvas y A. Novais, "Resilience metrics in the assessment of complex supply-chains performance operating under demand uncertainty," Omega, vol. 56, pp. 53–73, 2015.