Revista digital de Semilleros de Investigación REDSI
ISSN: 2711-3892

ESTRUCTURA CANÓNICA DE LA RELATIVIDAD GENERAL

CANONICAL STRUCTURE OF GENERAL RELATIVITY

[1] Yorlin García, [2] Dr. Mariano Celada, [3] Dra. Blanca Cañas
[1,2,3] Programa de Física
[1,3] Universidad de Pamplona
[2] Universidad Autónoma de México

RESUMEN

La formulación hamiltoniana de la relatividad general en el formalismo de segundo orden lleva a las variables ADM (Arnowitt - Deser - Misner), donde la dinámica de la teoría está codificada en la "evolución" de la métrica de las 3-geometrías que folian el espacio-tiempo. Por otro lado, uno puede desarrollar el análisis canónico de la acción de Palatini (o Holst), la cual constituye una formulación de primer orden de la relatividad general donde el campo gravitacional es representado no por un tensor métrico, sino por un marco ortonormal junto con una conexión de Lorentz. Ya sea eliminando las constricciones de segunda clase o sin introducirlas en el proceso,
uno obtiene un espacio de fases parametrizado por variables manifiestamente covariantes de Lorentz sujetas a la constricción de Gauss, la de difeomorfismos y la escalar. Estas dos últimas deben estar asociadas con las que surgen en el formalismo ADM, por lo que encontrar la relación precisa entre ambas formulaciones canónicas de la relatividad general se hace necesario. Esta tesis constituye un primer paso para establecer esta relación. Con este fin, en este trabajo se realiza el análisis canónico de la acción de Palatini en n-dimensiones (para $n > 2$) con constante
cosmológica, que involucra solo constricciones de primera clase (siguiendo de cerca el método desarrollado en (Montesinos, Escobedo, Romero, & Celada. (2020)). Esto es corroborado explícitamente a través del cálculo del álgebra de constricciones de la teoría, mostrando que esta cierra y es consistente. Finalmente, se lleva a cabo el conteo de grados de libertad físicos de la teoría y se encuentra que coinciden con los de la formulación ADM.

Palabras clave: Relatividad, análisis canónico, acción, hamiltoniano.

ABSTRACT

The Hamiltonian formulation of general relativity in the second-order formalism leads to the variables ADM (Arnowitt - Deser - Misner), where the dynamics of the theory is encoded in the "evolution" of the metric of the 3-geometries that folian the space time. On the other hand, one can develop the canonical analysis of the Palatini (or Holst) action, which constitutes a first-order formulation of general relativity where the gravitational field is represented not by a metric tensor, but by an orthonormal frame together with a Lorentz connection. Either eliminating the second-class constraints or not introducing them into the process, one obtains a phase space parametrized by manifestly covariant Lorentz variables subject to Gaussian, diffeomorphism, and scalar constraints. These last two must be associated with those that arise in the ADM formalism, so finding the precise relationship between both canonical formulations of general relativity becomes necessary. This thesis is a first step in establishing this relationship. To this end, in this work the canonical analysis of the Palatini action in n-dimensions (for n> 2) with cosmological constant is performed, which involves only first class constrictions (closely following the method developed in (Montesinos, Escobedo , Romero, & Celada. (2020)). This is explicitly corroborated through the calculation of the algebra of constrictions of the theory, showing that it is close and consistent. Finally, the physical degrees of freedom of the theory are counted. theory and found to match those of the ADM formulation.

Keywords: Relativity, canonical analysis, action, Hamiltonian.

I. Introducción

La relatividad general (RG) es una teoría geométrica de la gravedad concebida por Albert Einstein, basada en dos principios esenciales: el principio de covarianza general, que puede expresarse como: “las leyes de la física deben ser las mismas para cualquier observador", y el principio de equivalencia, que establece que “las leyes de la relatividad especial se aplican de forma local para todo observador inercial". La teoría de la RG ha jugado un rol importante en las últimas décadas, puesto que ha revolucionado el pensamiento físico-matemático involucrado en la descripción de los fenómenos macroscópicos. La noción relativa de la teoría juega con la intuición misma, marcando el hecho de que en ningún marco de referencia sea este inercial o no, es distinguible la presencia de un campo gravitacional por medio de experimentos locales. Esto está justamente postulado como el principio de equivalencia de Einstein (PEE): “las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial en regiones lo suficientemente pequeñas del espacio-tiempo, en las cuales es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional mediante experimentos locales". Así, la interacción gravitatoria deja de ser pensada como una fuerza a distancia para convertirse en una característica del espacio-tiempo, es decir, en la geometría intrínseca del espacio-tiempo mismo.

El PEE muestra que la gravedad es geométrica, dado que no es distinguible encontrarse bajo aceleración uniforme o en un campo gravitacional uniforme: como la aceleración es un concepto geométrico, entonces la gravedad también debe serlo. En la teoría de Newton el potencial gravitacional satisface la ecuación de Poisson, la cual relaciona segundas derivadas del potencial con la densidad de materia. Al trasladar el concepto a relatividad, se generaliza utilizando un tensor que contenga segundas derivadas del tensor métrico y ese tensor es la curvatura de Riemann. El hecho de que el tensor métrico se interprete como potencial gravitacional, viene de postular que el movimiento en el campo gravitacional se dé a lo largo de geodésicas. Esto se justifica con el hecho de que, en pequeñas regiones, al poder igualar gravedad y aceleración, es como si no hubiera gravedad y las trayectorias fueran, en pequeñas regiones líneas rectas, es decir, geodésicas de espacio plano. Así, se postula que el movimiento de partículas de prueba en general sean geodésicas (las líneas más rectas posibles de un espacio dado, que en espacios métricos coinciden con las curvas que extremalizan la distancia). Esto lleva a la propuesta de que lo que experimentamos como gravedad, es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo (Sean M. Carroll (1997)).

Para implementar el principio de covarianza generalizado, la RG hace uso del lenguaje tensorial, el cual contiene objetos definidos sobre cada punto de una variedad diferenciable (modelo de espacio-tiempo), que poseen ciertas reglas de transformación bien definidas ante cambios arbitrarios de coordenadas. Estos tensores a su vez determinan propiedades geométricas y físicas de la variedad diferenciable, y entre ellos podemos resaltar al tensor métrico $g(U; V)$, el tensor de curvatura de Riemann $R(X; Y)Z$ (M. Nakahara (2003)) y el tensor de energía-momento $T(U; V)$, los cuales constituyen la materia prima en la ecuación de campo para gravedad de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = k T_{\mu\nu} \tag{1}$$

La teoría de la RG, ha sido experimentalmente verificada en numerosas ocasiones desde su formulación y publicación; vale la pena mencionar dos predicciones (tempranas) que marcaron el auge de la teoría. La primera publicada el 18 de noviembre de 1915, "Explicación del movimiento del perihelio de Mercurio a partir de la teoría general de la relatividad". En la segunda, Einstein descubrió que la desviación de la luz para una estrella situada visualmente justo en el borde del Sol, tenía un desplazamiento aparente de 1;74''. De hecho, después de varios intentos para medir la desviación, dos expediciones británicas en 1919 confirmaron la predicción de Einstein al obtener una precisión del 1% con los valores predichos por la RG (JJ O'Connor and EF Robertson (1996)).

Recientemente la RG ha gozado de gran exposición mediática gracias a la detección de ondas gravitacionales. El 11 de febrero 2016, las colaboraciones LIGO, Virgo y GEO600 anunciaron la primera detección de ondas gravitacionales, producidas por la fusión de dos agujeros negros [8]. Otra predicción fundamental de la teoría de la RG es la existencia de agujeros negros . Una característica principal de estos es su horizonte de eventos, un límite causal unidireccional en el espacio-tiempo del cual ni siquiera la luz puede escapar. Casi un siglo después de los resultados obtenidos por Schwarzschild, siguen siendo el núcleo de las preguntas fundamentales para unificar la RG con la mecánica cuántica.El 10 de abril del 2019, una red de ocho telescopios (Event Horizon Telescope, una matriz global de interferometría de línea de base muy larga que observa a una longitud de onda de 1.3 mm) en distintos lugares del planeta, permitió captar la primera imagen real del horizonte de eventos de un agujero negro supermasivo, en el centro de la galaxia elíptica gigante M87 (Akiyama et al (2019)). En general, la imagen observada es consistente con las expectativas para la sombra de un agujero negro de Kerr como lo predice la RG. La asimetría en la intensidad de luz que se observa en el anillo, puede explicarse haciendo uso de la radiación Doppler (radiación relativista), puesto que en la mitad "inferior" de la imagen procesada, el material que se acerca al espectador a velocidades relativistas se percibe con más brillo que el material que se aleja (Akiyama et al (2019)). Estos elementos hacen de la RG una de las mejores teorías existentes para la descripción de los fenómenos gravitacionales.

Sin embargo, desde el punto de vista teórico la situación no es tan acogedora. A lo largo de los años se ha realizado una gran cantidad de esfuerzos para desarrollar un marco para la formulación canónica hamiltoniana de la RG. El más conocido e influyente de estas formulaciones, es el llamado formalismo ADM, nombrado por sus autores Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W. Misner. La construcción clásica de la teoría hamiltoniana a partir de este punto implica el cálculo de los momentos canónicamente conjugados a las variables dinámicas, es decir, a las componentes del tensor métrico, tomando la derivada parcial de la densidad lagrangiana respecto de las velocidades.

Pero es necesario privilegiar alguna de las coordenadas como el tiempo para poder definir velocidades. Esto parece romper la invarianza bajo difeomorfismos. Sin embargo, este no es el caso porque dicha separación del espacio-tiempo en espacio y tiempo es completamente arbitraria. La arbitrariedad, de hecho, agota el grupo de difeomorfismos completo. Dado que la acción ADM es invariante bajo difeomorfismos, no depende de esta división auxiliar y su variación con respecto a ella conduce, como es lógico, a los generadores de este grupo de invarianza. La complicación algebraica a la que lleva tal procedimiento es enorme. Podemos
darnos una idea de dicha complejidad con el hecho de que P.A.M. Dirac dedicara más de una década en tal intento sin llegar a resultados satisfactorios
.
El formalismo canónico se ha desarrollado, en particular, con miras a la cuantización canónica de la gravedad. En los últimos años una variante de las variables canónicas ADM (las variables de Ashtekar-Barbero) se ha vuelto muy popular y forma la base del llamado enfoque de gravedad cuántica de lazos. Pero la RG es una teoría de la gravedad para la cual no existe una versión cuántica exitosa por el momento. Esto es debido a que los métodos de cuantización de campo convencionales se basan en la expansión perturbativa del campo débil. Su aplicación a la RG falla porque produce una teoría no re-normalizable, dado que surge una infinidad de parámetros independientes (coeficientes de contratérmino) necesarios para definir la teoría. Sin embargo, una elección dada para esos parámetros podría darle sentido a la teoría, pero como es imposible realizar
infinitos experimentos para fijar los valores de cada parámetro, se ha argumentado que no se tiene, en la teoría de perturbaciones, una teoría física con sentido.

La no–cuantizabilidad proviene del hecho, de que en esta teoría se estaría cuantizando la geometría, es decir, el fondo mismo sobre el cual se formula la teoría. Esta situación es bastante diferente de lo que ocurre en otras teorías en las que la cuantización se realiza sobre un fondo fijo. Así, una teoría de gravedad cuántica implicaría una comprensión profunda de lo que significan el espacio y
el tiempo en el régimen cuántico (Mendoza, J et al (2021), algo en la cual radica tanto la dificultad de su obtención como la belleza de la misma. Parece entonces que la alternativa más viable para obtener una teoría cuántica de la gravedad, consiste en desarrollar un enfoque de cuantización no perturbativo e independiente del fondo del campo gravitacional. Entre los candidatos más promisorios en esta línea de pensamiento tenemos a la gravedad cuántica de lazos (Loop Quantum Gravity, LQG), la cual predice una estructura discreta del espacio a escalas microscópicas. Dado que dicho modelo se basa en una de las formulaciones canónicas de la relatividad general, es interesante entender cómo tales formulaciones están relacionadas a nivel clásico. Esto a su vez podría proveer nuevos puntos de partida para desarrollar una cuantización canónica de la gravedad donde los problemas que presentan los modelos actuales (como la ambigüedad de Immirzi o la recuperación de un apropiado límite clásico, entre otros) puedan ser resueltos de una forma satisfactoria.

Si bien la gravedad cuántica de lazos es uno de los modelos candidatos para la cuantización del campo gravitacional, está basada en las variables de Ashtekar-Barbero para la RG que surgen del análisis canónico de la acción Holst. Aunque las ecuaciones derivadas de esta acción son las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein, contiene un parámetro libre que resulta importante a nivel cuántico. Se cree que la presencia del llamado parámetro de Immirzi puede deberse al hecho de que las variables de Ashtekar-Barbero se obtienen mediante el uso de la norma temporal, que rompe la invarianza de Lorentz reduciéndola a la invarianza rotacional para simplificar la construcción de la teoría cuántica asociada. Debido a esto, han habido varios intentos para construir una descripción canónica covariante de Lorentz del espacio de fase de la RG que busca resolver la

ISSN: 2711-3892

ambigüedad de Immirzi. Como es bien sabido, existen diferentes formas en las que puede definirse un lagrangiano para describir la dinámica clásica de un sistema físico. Así pues, las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein pueden ser derivadas de una acción diferente, que depende de un par de variables independientes, la tétrada (o marco ortonormal) y una conexión de Lorentz, la cual es conocida como la acción de Hilbert-Palatini (HP) y provee un lagrangiano de primer orden para la RG que, además, tiene múltiples relaciones con otras acciones relevantes (P. Peldan (1994)). Con la introducción de la tétrada, la RG pasa a ser una teoría dotada con dos simetrías fundamentales: la invarianza bajo difeomorfismos (una forma más técnica de expresar la covarianza general) y la invarianza ante transformaciones locales de Lorentz, las cuales implementan cambios de marcos ortonormales en cada punto del espacio-tiempo. El uso de la tétrada y la conexión es de gran utilidad en la formulación de una acción fermiónica generalmente covariante, que acopla los fermiones a la gravedad (M. Montesinos, et al (2018)).

La acción de Palatini es solo uno de varios intentos involucrados en la búsqueda de una densidad lagrangiana para obtener gravedad pura. Por ende, existen otros tipos de acciones que involucran diferentes campos o estructuras matemáticas (ver (M. Montesinos, et al (2016)) para formulaciones usando 2-formas). Un ejemplo de ello está en la acción de Palatini auto-dual, que puede verse como la base lagrangiana para la formulación de Ashtekar de la gravedad canónica (M. Montesinos, et al (2016)). Esta constituye una formulación compleja de la RG para la que se deben especificar condiciones de realidad apropiadas para recuperar la teoría real. La acción Holst (Sören Holst (1996)), que es la base de la versión de variables reales de la teoría de Ashtekar, puede verse como una generalización de la acción HP. Cuando se realiza un análisis canónico covariante de Lorentz de la RG, se encuentra que este contiene constricciones de segunda clase. Estas constricciones se pueden tratar de manera equivalente introduciendo el paréntesis de Dirac o resolviéndolas de forma explícita. Vale la pena mencionar que, aunque el enfoque derivado en (Nuno Barros E Sá (2001)) ciertamente es covariante de Lorentz, no lo es manifiestamente covariante de Lorentz (es decir, las simetrías involucradas no se muestran de forma explícita).

Dado que nos gustaría mantener intactas las simetrías clásicas de la RG tanto como sea posible, cabe preguntarse si es plausible resolver las restricciones de segunda clase de manera manifiestamente covariante de Lorentz, obteniendo una respuesta afirmativa en (Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner (2008)). Tal formulación, restringida a la acción de Palatini, es la que deseamos relacionar con la formulación ADM de la relatividad general, es decir, queremos establecer un puente entre ambas formulaciones. Por lo tanto, el propósito de esta tesis es realizar un análisis canónico de la acción de HP, sin involucrar constricciones de segunda clase, con el fin de encontrar una relación con el formalismo ADM, identificando tanto las variables dinámicas como las no dinámicas, y analizando el comportamiento de las constricciones que surgen en ambos formalismos, siguiendo de cerca el trabajo desarrollado por los autores de (M. Montesinos, et al (2020)). Esto permitiría establecer un puente directo entre ambos formalismos, sin involucrar ni constricciones de segunda clase ni rompimientos de la simetría interna, algo que llenaría un gap en la literatura de las diferentes formulaciones de la relatividad general. Esto nos permitirá en futuros trabajos, analizar el comportamiento de formalismos más generales/complejos (entre ellas la acción de Holst), que tienen como base el formalismo de Palatini.

ISSN: 2711-3892

II. Formalismo canónico

2.1 Lagrangiano de Hilbert-Palatini

Al considerar la conexión afín y la métrica como variables independientes en el principio de acción de EH, la acción pasa a ser una formulación de primer orden ya que solo primeras derivadas de las variables son involucradas, y por lo tanto, no complican demasiado las ecuaciones de Euler-Lagrange. Dicha acción fue considerada por Attilio Palatini y fue denominada la acción de Hilbert-Palatini (HP).

Hasta el momento la relatividad general propuesta por A. Einstein, hace uso de la compatibilidad métrica y torsión cero, las cuales restringen la conexión a la de Levi-Civita. Sin embargo, es posible considerar ahora la acción de EH con
la conexión afín arbitraria ($\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$)

$$S[g_{\mu\nu},\tilde{\Gamma}] = \int_M d^m x\sqrt{|g|}\,R(\tilde{\Gamma}) \tag{2}$$

para M, una variedad m-dimensional y sin bordes $\partial M = 0$. El lagrangiano pasa a ser una función que depende de dos variables, la métrica y la conexión, por ende, se obtienen nuevas ecuaciones propias como resultado de la variación respecto a cada una de las variables.

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\delta S[g_{\mu\nu},\tilde{\Gamma}]}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) - \frac{1}{2}R(\tilde{\Gamma})g_{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

Aquí, sin embargo, no se obtienen las ecuaciones de campo para gravedad de Einstein en el vacío, porque la conexión independiente $\tilde{\Gamma}$ no es la conexión de Levi- Civita. De forma análoga, bajo variación respecto a la conexión e imponiendo las condiciones de estacionariedad, además de considerar una geometría arbitraria ($\tilde{\Gamma}$ = Γ+C), se obtiene

Esta forma de escribir la conexión es una estrategia para resolver las ecuaciones resultantes. Resulta que bajo la elección de torsión cero la conexión es forzada a ser métrica compatible, determinando de forma única la conexión es la de Levi-Civita. Intercambiando la elección por compatibilidad métrica, luego la conexión es forzada a ser libre de torsión y así la conexión resultante es determinada nuevamente de forma única por la conexión de Levi-Civita.

$$\begin{gathered} T_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \; y \; \delta_{\tilde{\Gamma}} S(g,\tilde{\Gamma}) = 0 \;\Longrightarrow Q_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \Longrightarrow \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\ Q_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \; y \; \delta_{\tilde{\Gamma}} S(g,\tilde{\Gamma}) = 0 \;\Longrightarrow T_{\lambda\mu\nu}(\tilde{\Gamma}) = 0 \Longrightarrow \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \end{gathered} \tag{4}$$

Donde $T_{\lambda\mu\nu} = 2C_{\lambda[\mu\nu]}$ y $Q_{\lambda\mu\nu} = 2C_{(\lambda\mu)\nu}$. Con esto la primer ecuación de movimiento obtenida pasa a ser la ecuación de campo para gravedad de Einstein.

Por otro lado, introduciendo la noción de tétradas (conjunto de vectores que comprende una base ortonormal) la acción de HP contiene como variables independientes al marco ortonormal y a la

ISSN: 2711-3892

conexión de Lorentz, las cuales son esenciales en la formulación de una acción fermiónica generalmente covariante (M. Montesinos,et all (2017)).

2.1.1 Formulación desde las bases ortonormales

Consideremos ahora una descripción alternativa de la acción, expresando esta en términos del vielbein y de una conexión arbitraria. De esta manera, denotando el grupo interno por SO(σ) en representación general de SO(n) (o SO(n − 1, 1)) siendo σ = ±1, el cual representa de forma general una variedad euclidiana (+1) y lorentziana (−1) respectivamente; con esto, la signatura métrica es definida como (σ, +1, · · · , +1). Así, la acción HP sobre una variedad n-dimensional sin bordes ∂M = 0, en términos de las nuevas variables es de la forma

$$S[e, \omega] := \int_M \star (e_I \wedge e_J) \wedge R^{IJ}[\omega] \tag{5}$$

donde $R^I{}_J = d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J$, es la curvatura 2-forma so(σ)-valuada (so(σ) representa el álgebra de Lie del grupo SO(σ)) en términos de la conexión $\omega^I{}_J$ 1-forma so(σ)-valuada. Bajo variación funcional respecto a cada una de las variables independientes (desapreciando términos de frontera), se tiene que:

$$\begin{aligned} \delta_\omega S = 0 &= (-1)^{n-1} D \star (e_I \wedge e_J) \\ \delta_e S = 0 &= (-1)^{n-1} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ} \end{aligned} \tag{6}$$

Donde $D(\delta\omega^{IJ}) = d(\delta\omega^{IJ}) + \omega^I{}_K \wedge \delta\omega^{KJ} + \omega^J{}_K \wedge \delta\omega^{IK}$, la derivada covariante exterior usual,que actúa sobre n-formas so(σ) - valuadas. Estas ecuaciones obtenidas combinadas retornan las ecuaciones de campo de Einstein en la base ortonormal (dado que la conexión involucrada es la de Levi-Civita, por ende $((-1)^{n-1} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ} = 0)$, pasa a ser la ecuación de campo de Einstein para gravedad en el vacío). Realizando un cambio a la base coordenada, la ecuación $((-1)^{n-1} \star (e_I \wedge e_J \wedge e_K) \wedge R^{IJ} = 0)$ toma la forma familiar

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \tag{7}$$

2.2 Formulación hamiltoniana de la acción de Hilbert-Palatini (HP)

Las ecuaciones de movimiento obtenidas del lagrangiano de HP reducen la dificultad en los cálculos en comparación con el lagrangiano de EH, aunque a la hora de hacer un análisis canónico del lagrangiano HP, la dificultad se incrementa. Enfoques desarrollados en (M. Montesinos, et al (2020)), muestran la alta no trivialidad en la solución de las constricciones de segunda clase involucradas. Cabe preguntarse entonces, si existe un análisis canónico que solo involucre constricciones de primera clase para el Lagrangiano de HP. La respuesta es afirmativa. El tratamiento establecido en (M. Montesinos (2020)) muestra que las constricciones de segunda clase pueden omitirse, siguiendo un camino alterno dentro del análisis canónico. De esta manera, siguiendo de cerca el enfoque mostrado en (M. Montesinos (2020)), se desarrolla el análisis canónico de la acción de Palatini n-dimensional en este capítulo.

Consideremos una variedad n-dimensional lorentziana o riemanniana M (con n > 2), para M difeomorfa a R × Σ. Σ es una variedad (n-1)-dimensional tipo-espacio, orientable y sin bordes (∂Σ = 0). Puntos sobre M son etiquetados con x^μ, las coordenadas locales adaptadas a esta foliación están determinadas por $x^\mu = x^\mu(t, y^a)$ donde t y y^a (a, b, ... = 1, 2, ..., n 1) etiquetan a R y Σ

ISSN: 2711-3892

respectivamente. Con el objetivo de mantener la simetría de Lorentz manifiesta, se involucra el formalismo del marco y co - marco, donde las variables fundamentales son el marco $\{e^I\}$ y la conexión 1-forma $\omega^I{}_J$ (conocida como conexión de Lorentz $\omega^I{}_J = \omega_\mu{}^I{}_J dx^\mu$) compatible con la métrica

$$\mathrm{d}\eta_{IJ} - \omega^K{}_I \eta_{KJ} - \omega^K{}_J \eta_{IK} = 0 \tag{8}$$

con $\eta_{IJ} = \mathrm{diag}(\sigma, +1, \ldots, +1)$ definida como la métrica del espacio indexado, el cual se usa para subir y bajar índices internos I, J, ... = 0, 1, 2, ..., n 1. Consideremos además SO(σ) := SO(n) [o SO(n 1, 1)] como el grupo interno de rotaciones del marco, para σ = +1 representa el grupo Euclidiano SO(n) y σ = 1 denota el grupo de Lorentz SO(n 1, 1). De este modo, dentro del formalismo de primer orden con una constante cosmológica, la acción de Palatini (o de Einstein-Cartan) está dada por

$$S[e,\omega] := \int_M [\star (e^I \wedge e^J) \wedge F_{IJ} - 2\Lambda\rho] \tag{9}$$

donde k es una constante relacionada con la constante de Newton, ρ es la forma de volumen de M, y $F^I{}_J$ es la curvatura de la conexión 1-forma $\omega^I{}_J$

$$\rho := \frac{1}{n!}\epsilon_{I_1 \ldots I_n} e^{I_1} \wedge \ldots \wedge e^{I_n}$$
$$F^I{}_J := d\omega^I{}_J + \omega^I{}_K \wedge \omega^K{}_J \tag{10}$$

Es importante resaltar que el tensor $F^I{}_J$ toma valores en el álgebra de Lie so(σ), y es descrito de forma apropiada dentro del contexto de la teoría de haces fibrados.

para desarrollar un análisis canónico de la acción, primero se realiza una descomposición (n-1) + 1, expresando el marco y la conexión de la forma

$$e^I = e_t{}^I dt + e_a{}^I dx^a$$
$$\omega^I{}_J = \omega_t{}^I{}_J dt + \omega_a{}^I{}_J dx^a \tag{11}$$

luego el tensor métrico está dado por

$$ds^2 = \eta_{IJ} e_t{}^I e_t{}^J dt \otimes dt + \eta_{IJ} e_t{}^I e_a{}^J (dt \otimes dx^a + dx^a \otimes dt) + \eta_{IJ} e_a{}^I e_b{}^J dx^a \otimes dx^b \tag{12}$$

Esta expresión puede tomarse en analogía con la obtenida en la descomposición ADM de la métrica, de forma que cada una de las componentes que acompañan a la base pueden ser escritas como:

$$\sigma N^2 + N_a N^a = \eta_{IJ} e_t{}^I e_t{}^J$$
$$N_a = \eta_{IJ} e_t{}^I e_a{}^J$$
$$q_{ab} = \eta_{IJ} e_a{}^I e_b{}^J \tag{13}$$

q_{ab} es la métrica inducida sobre Σ, cuya inversa es denotada por q^{ab}, N_a hace referencia a la vector de desplazamiento y N la función lapso. Sobre cada hoja Σt, se define una 1-forma n, como $n = n_I e^I$ que satisface $n^I n_I = \sigma$ y $n(\partial_a) = 0$. Las componentes de la 1-forma n pueden ser escritas explícitamente de la forma

Revista digital de Semilleros de Investigación REDSI
ISSN: 2711-3892

$$n^{I} = \frac{1}{(n-1)!\sqrt{q}} \epsilon^{I I_1 \ldots I_{n-1}} \tilde{\eta}^{t a_1 \ldots a_{n-1}} e_{a_1 I_1} \ldots e_{a_{n-1} I_{n-1}} \quad (14)$$

Cabe resaltar, que la letra t no es tomada como un índice, sino que es entendido como la posición 0 del índice espacio-tiempo (la posición cero dentro de los índices de Lorentz, es denotado por 0) y q = det(q_{ab}) > 0, es el determinante de la métrica inducida sobre Σ. La forma explícita de la 1-forma n, nos permite introducir un nuevo objeto

$$q^{I}{}_{J} := e_{aJ} e_{b}{}^{J} = \delta^{I}_{J} - \sigma n^{I} n_{J} \quad (15)$$

el proyector sobre el plano ortogonal a n^I. Bajo estas premisas, la descomposición de la acción pasa a ser

$$S = k \int_{R\times\Sigma} dtd^{n-1}x(-2\tilde{\Pi}^{aI} n^{J} \partial_t \omega_{aIJ} + \omega_{tIJ} \tilde{\zeta}^{IJ} + e_{tI} \tilde{\varsigma}^{I}) + 2k \int_{M} \partial_a(\sqrt{q}\, \tilde{\Pi}^{aI} n^{J} \omega_{tIJ}) dtd^{n-1}x \quad (16)$$

Donde

$$\tilde{\Pi}^{aI} = \sqrt{q} q^{ab} e_{b}{}^{I}$$
$$\tilde{\zeta}^{IJ} := -2\delta^{[I}_{M}\delta^{J]}_{N}[\partial_a \tilde{\Pi}^{aM} n^{N} + 2\omega_{a}{}^{N}{}_{K} \tilde{\Pi}^{a[M} n^{K]}]$$
$$\tilde{\varsigma}^{I} := \frac{1}{\sqrt{q}}[2\tilde{\Pi}^{bJ}\tilde{\Pi}^{cI} n^{K} F_{bcKJ} + n^{I}(\tilde{\Pi}^{bK}\tilde{\Pi}^{cJ} F_{bcKJ} - 2\Lambda\rho)] \quad (17)$$

La acción expresada de esta manera muestra en su último término la contribución del comportamiento en la frontera, pero ya que ∂M= 0 los términos no se tendrán en cuenta para el presente análisis.

No es posible decir que esta acción es de la forma $p\dot{q} - H$, dado que las variables n^I y e_{aI} dependen explícitamente de $\tilde{\Pi}^{aI}$. Sin embargo, involucrando objetos con su inversa bien definida se tiene que

$$e_{a}{}^{I} = h^{\frac{1}{2(n-2)}} \underbrace{h}_{ba} \tilde{\Pi}^{bI} \quad (18)$$

donde $q^{n-2} = h$ y $\underbrace{h}_{ba}$ es definida como la inversa de $\tilde{\tilde{h}}^{ab} = \tilde{\Pi}^{aJ}\tilde{\Pi}^{b}{}_{J}$. Note que bajo ley de transformación tensorial, q es de peso 2, mientras que h es de peso 2(n − 2). Por otro lado, las componentes de la 1-forma n dependen explícitamente de $\tilde{\Pi}^{aI}$ como sigue

$$n^{I} = \frac{1}{(n-1)!\sqrt{h}} \epsilon^{I I_1 \ldots I_{n-1}} \underbrace{\eta}_{t a_1 \ldots a_{n-1}} \tilde{\Pi}^{a_1}{}_{I_1} \ldots \tilde{\Pi}^{a_{n-1}}{}_{I_{n-1}} \quad (19)$$

esto nos muestra que $e_{t}{}^{I}$ y $e_{a}{}^{J}$ definen un mapeo uno-a-uno y sobreyectivo de n^2variables N , N_a, $\tilde{\Pi}^{bI}$ a las n^2 variables originales del marco $e_{a}{}^{J}$. Por lo tanto, bajo el mapeo a las nuevas variables la acción toma el aspecto

$$S = k \int_{R\times\Sigma} dtd^{n-1}x(-2\tilde{\Pi}^{aI} n^{J} \partial_t \omega_{aIJ} + \omega_{tIJ} \tilde{\zeta}^{IJ} - N^{a}\tilde{V}_{a} - \underbrace{N}\, \tilde{\tilde{C}}) \quad (20)$$

Para

$$\tilde{\tilde{C}} = -\sigma \tilde{\Pi}^{aI} \tilde{\Pi}^{bJ} F_{abIJ} + 2\sigma h^{\frac{1}{2(n-2)}} \Lambda$$
$$\underset{\smile}{N} = h^{\frac{-1}{2(n-2)}} N$$
$$\tilde{V}_a = -2\tilde{\Pi}^{bJ} n^I F_{abIJ} \quad (21)$$

Cabe resaltar que el primer término $(-2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \partial_t \omega_{aIJ})$ puede reescribirse como

$$-2\tilde{\Pi}^{aI} n^J \partial_t \omega_{aIJ} = 2\tilde{\Pi}^{aI} \partial_t [W^b_{aIJK} {\omega_b}^{JK}] \quad (22)$$

donde $W^b_{aIJK} := -(\delta^b_a \eta_{I[J} n_{K]} + n_I \underset{\smile}{h}_{ac} \tilde{\Pi}^b{}_{[J} \tilde{\Pi}^c{}_{K]})$, el cual muestra anti-simetría en los dos últimos índices. La ecuación anterior sugiere definir n(n−1) variables de configuración

$$\Omega_{aI} := W^b_{aIJK} {\omega_b}^{JK} \quad (23)$$

las cuales son canónicamente conjugadas a $\tilde{\Pi}^{aI}$. Ω_{aI} incorpora n(n − 1) ecuaciones que involucran n(n−1)2/2 variables desconocidas de ω_{aIJ} , esto conlleva a encontrar n(n−1)(n−3)/2 variables para dar solución a ω_{aIJ}. Por otro lado, con aras de simplificar la forma de las constricciones que resultan, se realiza una transformación canónica que deja el momento $\tilde{\Pi}^{aI}$ invariante. De esta manera las variables de configuración están relacionadas una respecto a la otra, como sigue

$$Q_{aI} = \Omega_{aI} - {W_a}^b{}_{IJK} {\Gamma_b}^{JK} \quad (24)$$

Los coeficientes de conexión ${\Gamma_b}^{JK}$ son conocidos como la conexión híbrida asociada a la derivada covariante ∇_a definida sobre cada hoja Σt, la cual actúa sobre índices de Lorentz e índices espacio-tiempo; además, aniquila a ${e_a}^I$ a través de

$$\nabla_a {e_b}^I = \partial_a {e_b}^I + {\Gamma_a}^I{}_J {e_b}^J - \Gamma^c_{ab} {e_c}^J = 0 \quad (25)$$

con $\Gamma_{aIJ} = -\Gamma_{aJI}$ y $\Gamma^c_{ab} = \Gamma^c_{ba}$. Esta expresión expone $n(n-1)^2$ ecuaciones lineales inhomogéneas, para Γ_{aIJ} (n(n − 1)2/2 variables desconocidas) y Γ^c_{ab} (n(n− 1)2/2 variables desconocidas) esto nos muestra que la solución es única. De esta manera es posible obtener la solución para cada uno de los coeficientes; por un lado, se obtiene que Γ^c_{ab} son los símbolos de Christoffel asociados con la métrica inducida qab sobre Σt; por otro lado, la solución para Γ_{aIJ} , se obtiene haciendo uso del operador de proyección, obteniendo que

$$\Gamma_{aIJ} = q^{ab} e_{b[I|}(\partial_a e_{c|J]} - \partial_c e_{a|J]}) + \sigma q^{bc} e_{b[I} n_{J]} n_K (\partial_a {e_c}^K + \partial_c {e_a}^I) + q^{bc} q^{df} e_{aK} e_{b[I|} e_{|d|J]} \partial_f {e_c}^K \quad (26)$$

Es importante resaltar que la derivada covariante ∇ aniquila a $\tilde{\Pi}^{aI}$

$$\nabla_a \tilde{\Pi}^{bI} = \partial_a \tilde{\Pi}^{bI} + {\Gamma_a}^I{}_J \tilde{\Pi}^{bJ} + \Gamma^b_{ac} \tilde{\Pi}^{cI} - \Gamma^c_{ac} \tilde{\Pi}^{bI} = 0 \quad (27)$$

Así, la conexión híbrida y los símbolos de Christoffel describen las mismas propiedades geométricas de la sub-variedad y están dados además en términos de $\widetilde{\Pi}^{aI}$

$$\Gamma_{aIJ} = \underset{\sim}{h}_{ad}\, \widetilde{\Pi}^{c}{}_{[I}\, \partial_{|c|} \widetilde{\Pi}^{d}{}_{J]} + \underset{\sim}{h}_{ad}\, \underset{\sim}{h}_{ce}\, \widetilde{\Pi}^{c}{}_{L} \widetilde{\Pi}^{d}{}_{[I} \widetilde{\Pi}^{f}{}_{J]}\, \partial_{f} \widetilde{\Pi}^{eL} + \underset{\sim}{h}_{dc}\, \widetilde{\Pi}^{d}{}_{[I}\, \partial_{|a|} \widetilde{\Pi}^{c}{}_{J]}$$
$$- \underset{\sim}{h}_{ad}\, \underset{\sim}{h}_{ce}\, \widetilde{\Pi}^{d}{}_{L} \widetilde{\Pi}^{c}{}_{[I} \widetilde{\Pi}^{f}{}_{J]}\, \partial_{f} \widetilde{\Pi}^{eL} - \sigma\, \underset{\sim}{h}_{ad}\, \widetilde{\Pi}^{c}{}_{[I} n_{J]} n_{L} \partial_{c} \widetilde{\Pi}^{dL} + \sigma\, \underset{\sim}{h}_{dc}\, \widetilde{\Pi}^{d}{}_{[I} n_{J]} n_{L} \partial_{a} \widetilde{\Pi}^{cL} \qquad (28)$$

La variable configuración Q_{aI} surge de una modificación al término cinético de la forma

$$-2\widetilde{\Pi}^{aI} n^{J}\, \partial_t \omega_{aIJ} = 2\widetilde{\Pi}^{aI}\, \partial_t [W^{b}{}_{aIJK}(\omega_b{}^{JK} - \Gamma_b{}^{JK})] - 2\partial_a(n_I\, \partial_t \widetilde{\Pi}^{aI}) \qquad (29)$$

el término $\partial_a(n_I\, \partial_t \widetilde{\Pi}^{aI})$, no contribuye dentro de la acción debido a que la integral no contribuye porque Σ no tiene bordes. El término de frontera está definido sobre Σ. La razón por la cual se mantiene el signo menos es debido a que $\omega_b{}^{JK} - \Gamma_b{}^{JK}$ es un tensor de $SO(\sigma)$. Con esto se definen las variables de configuración

$$Q_{aI} := W^{b}{}_{aIJK}(\omega_b{}^{JK} - \Gamma_b{}^{JK}) \qquad (30)$$

La solución para ω_{aIJ} toma la forma

$$\omega_{aIJ} = \Gamma_{aIJ} + M^{b}{}_{aIJK} Q_b{}^{K} + \widetilde{\widetilde{N}}_a{}^{bcd}{}_{IJ}\, \underset{\sim}{u}_{bcd} \qquad (31)$$

Para

$$M^{b}{}_{aIJK} = \frac{2\sigma}{(n-2)}[(n-2)\delta^{b}_{a} n_{[I}\eta_{J]K} + \underset{\sim}{h}_{ae}\, \widetilde{\Pi}^{e}{}_{[I} \widetilde{\Pi}^{b}{}_{J]} n_K]$$

$$N_a{}^{bcd}{}_{IJ} = [\delta^{b}_{a} \delta^{[c}_{e} \delta^{d]}_{f} - \tfrac{2}{(n-2)}\, \underset{\sim}{h}_{ae}\, \widetilde{\widetilde{h}}^{b[c} \delta^{d]}_{f}) \widetilde{\Pi}^{e}{}_{[I} \widetilde{\Pi}^{f}{}_{J]} \qquad (32)$$

las variables $\underset{\sim}{u}_{bcd}$ satisfacen $\underset{\sim}{u}_{bcd} = \underset{\sim}{u}_{bdc}$, condición de traza cero $\underset{\sim}{u}_{bcd}\, \widetilde{\widetilde{h}}^{bc} = 0$ y contienen $n(n-1)(n-3)/2$ variables que permiten dar solución a ω_{aIJ}. Todo esto nos conlleva a que la acción involucrada tenga la siguiente forma

$$S = k \int_{R\times\Sigma} dt d^{n-1}x (2\widetilde{\Pi}^{aI}\, \partial_t Q_{aI} - \lambda_{IJ} \widetilde{\zeta}^{IJ} - 2N^{a} \widetilde{D}_a - \underset{\sim}{N}\, \widetilde{\widetilde{S}}) \qquad (33)$$

Para

$$\widetilde{\zeta}^{IJ} = 2\widetilde{\Pi}^{a[I} Q_a{}^{J]}$$
$$\lambda_{IJ} = -\omega_{tIJ} + N^{a}(\Gamma_{aIJ} + M^{b}{}_{aIJK} Q_b{}^{K}) - 2\widetilde{\Pi}^{a}{}_{[I} n_{J]} \nabla_a \underset{\sim}{N} - \sigma \frac{(n-3)}{(n-2)} \underset{\sim}{N}\, n_{[I} \widetilde{\zeta}_{J]K} n^{K}$$
$$\widetilde{D}_a = 2\widetilde{\Pi}^{bI}\, \partial_{[a} Q_{b]I} - Q_{aI}\, \partial_b \widetilde{\Pi}^{bI}$$

$$\tilde{\tilde{S}} = -\sigma\tilde{\Pi}^{aI}\tilde{\Pi}^{bJ}R_{abIJ} + 2\tilde{\Pi}^{a[I}\tilde{\Pi}^{|b|J]}Q_{aI}Q_{bJ} + 2\sigma\Lambda h^{\frac{1}{2(n-2)}} \quad (34)$$

con R_{abIJ} el tensor de curvatura definido para la conexión Γ_{aIJ}. La acción resultante depende de las variables del espacio de fase $(Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI})$ de una forma más familiar. Además, involucra los multiplicadores de Lagrange (λ_{IJ}, N^a, N) y a los campos auxiliares $\underbrace{u}_{bcd}$. Estos últimos pueden fijarse usando sus propias ecuaciones de movimiento, obteniendose que para $\underbrace{N} \neq 0 \Rightarrow \underbrace{u}_{bcd} = 0$. La expresión encontrada en para la acción, fue obtenida en primer lugar en [1] y adopta la forma $p\dot{q} - H$, por lo tanto, se obtiene una formulación hamiltoniana manifiestamente covariante de la acción de Palatini. Esta forma hamiltoniana emerge de la parametrización original de las variables ${e_a}^I$ en términos de las variables de momentos $\tilde{\Pi}^{aI}$, la función lapse N y el vector shift N_a.

Note que no hay dependencia explícita de las derivadas temporales de las variables λIJ , Na y N . En consecuencia, las variaciones respecto a cada una de ellas imponen las siguientes constricciones primarias

- Constricción de Gauss $SO(n-1, 1)[\text{ó } SO(n)] \rightarrow \tilde{\zeta}^{IJ} \approx 0$,
- constricción de difeomorfismos (espaciales) $\rightarrow \tilde{D}_a \approx 0$,
- constricción escalar $\rightarrow \tilde{\tilde{S}} \approx 0$.

El símbolo ≈ representa una igualdad débil, con el fin de resaltar que cada una de las constricciones se encuentran sobre la superficie de constricción O_1 definida por las mismas, con $O_1 \subset O$ y O el espacio de fase. El hamiltoniano definido es un hamiltoniano total, debido a que es construido como una combinación lineal de constricciones

$$-H = k\int_\Sigma d^{n-1}x(-\lambda_{IJ}\tilde{\zeta}^{IJ} - 2N^a\tilde{D}_a - \underbrace{N}\tilde{\tilde{S}} \quad (35)$$

el cual es débilmente cero porque no involucra un hamiltoniano canónico (Hc = 0). Este hamiltoniano evidencia justamente que λ_{IJ}, Na y N juegan el rol de multiplicadores arbitrarios (multiplicadores de Lagrange). Cabe resaltar, que un hamiltoniano cero es la marca distintiva de un sistema generalmente covariante.

Con esto en mente y en aras de verificar que el hamiltoniano involucrado en la acción es consistente y completo, es necesario mirar el comportamiento de las constricciones involucradas. Tomando la condición de consistencia dentro de las constricciones primarias, nos lleva a calcular los corchetes de Poisson (PB) del conjunto de constricciones. Para ello es necesario tener en cuenta que para dos funcionales del espacio de fase, el PB bajo las variables del espacio de fase $(Q_{aI}, \tilde{\Pi}^{aI})$ es ahora dado de la forma

$$\{A, B\} = \frac{1}{2k}\int_\Sigma d^{n-1}x\left[\frac{\delta A}{\delta Q_a^I(x)}\frac{\delta B}{{\tilde{\Pi}^a}_I(x)} - \frac{\delta A}{{\tilde{\Pi}^a}_I(x)}\frac{\delta B}{\delta Q_a^I(x)}\right] \quad (36)$$

el cual es una generalización al continuo de la forma usual del PB. Tomando la definición de derivada funcional [21]. Para las variables del espacio de fase (Q_{aI}, $\widetilde{\Pi}^{aI}$) se tiene que su PB es

$$\{Q_a{}^I(x), \widetilde{\Pi}^b{}_J(y)\} = \frac{1}{2k}\delta_a^b\delta_J^I\delta^{(n-1)}(x-y) \tag{37}$$

calculado en el mismo instante de tiempo (porque estamos sobre la misma hoja Σ). Resulta un poco más familiar definir funciones de peso apropiadas para las constricciones, con el fin de calcular los PB's entre ellas. Así, cada constricción toma la forma

$$\begin{gathered} D[N] := \int_\Sigma d^{n-1}x\, N^a(x)\widetilde{D}_a(x) \\ \zeta[M] := \int_\Sigma d^{n-1}x\, M_{IJ}(x)\tilde{\zeta}^{IJ}(x) \\ S[L] := \int_\Sigma d^{n-1}x\, \underset{\sim}{L}(x)\tilde{\tilde{S}}(x) \end{gathered} \tag{38}$$

De esta manera, los PB's entre las constricciones están dadas por

$$\begin{gathered} \{D[N_1], D[N_2]\} = \frac{1}{2k}D[\mathcal{L}_{N_1}N_2] \\ \{\zeta[M], D[N]\} = \frac{1}{2k}\zeta[-\mathcal{L}_N M_{IJ}] \\ \{\zeta[M_1], \zeta[M_2]\} = \frac{2}{k}\zeta[M_{1[LI]}\eta^{LK}M_{2[JK]}] \\ \{\zeta[M], S[L]\} = 0 \\ \{D[N], S[L]\} = \frac{1}{2k}S[\mathcal{L}_N L] \\ \{S[L_1], S[L_2]\} = -\frac{2\sigma}{k}\int_\Sigma d^{n-1}x\, \tilde{\tilde{h}}^{ab}(\underset{\sim}{L}_1\,\partial_a \underset{\sim}{L}_2 - \underset{\sim}{L}_2\,\partial_a \underset{\sim}{L}_1)(\widetilde{D}_b + \frac{1}{2}\Gamma_{bIJ}\tilde{\zeta}^{IJ} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{h}_{bc}\, \widetilde{\Pi}^c{}_I\widetilde{\Pi}^d{}_J\nabla_a\tilde{\zeta}^{IJ}) \end{gathered} \tag{39}$$

Esta álgebra de constricciones es cerrada dado que cada uno de los PB's involucrados son cero o débilmente cero. Además, la evolución de las constricciones vía el hamiltoniano total satisface las condiciones de consistencia, las cuales se reducen a la identidad $0 \approx 0$ al imponer las constricciones primarias. Por lo tanto, no se generan nuevas constricciones ni restricciones a los multiplicadores de Lagrange.

De esta manera, el hamiltoniano total encontrado es un hamiltoniano completo y consistente, dotado solo con constricciones primarias de primera clase, las cuales $n(n + 1)/2$ son independientes. La cantidad de grados de libertad (DOF) físicos del sistema, para $2n(n-1)$ variables independientes del espacio de fase, da como resultado

$$DOF = \frac{n(n-3)}{2} \tag{40}$$

El resultado obtenido está en concordancia con los DOF físicos involucrados en la formulación ADM. Por ende, obtenemos nuevamente que, para el caso 4- dimensional, existen 2 grados de libertad por punto del espacio

VI. Conclusiones

La formulación clásica de la gravedad dentro del formalismo hamiltoniano tomado desde el punto de vista de la relatividad general, impone una división entre espacio y tiempo de forma arbitraria, llevando a la descomposición ADM. El paso de las variables de configuración a las de espacio de fase involucra relaciones entre ellas llamadas constricciones. Estas constricciones pueden clasificarse en constricciones de primera y segunda clase, donde las simetrías involucradas de la teoría están relacionadas con la presencia de constricciones de primera clase, mientras que la de segunda clase significa que hay grados dinámicos de libertad en la teoría que pueden eliminarse. Para poder eliminar estas variables, es necesario configurar un nuevo PB que se refiera solo a grados de libertad dinámicamente importantes (M. Blagojević(2002)). Sin embargo, no toda formulación hamiltoniana tiene solo constricciones de primera clase; es bien sabido que el análisis canónico covariante de Lorentz de la acción de Holst para la relatividad general contiene restricciones de segunda clase (esto también es cierto para la acción de Palatini).

La formulación ADM se caracteriza por contener constricciones de primera clase solamente. Sin embargo, la formulación manifiestamente covariante de Lorentz de la acción de Palatini contiene constricciones de segunda clase. Dado que es posible encontrar la solución de estas constricciones, los enfoques expuestos en (N Bodendorfer, T Thiemann, and A Thurn (2013)) muestran la alta no trivialidad en el proceso. No obstante, el enfoque realizado en (M. Montesinos (2020)), anuncia un hamiltoniano consistente y completo, involucrando solo constricciones de primera clase. Por lo tanto, es posible concluir que el procedimiento seguido en la este articulo simplifica el análisis, dado que se obtiene una formulación hamiltoniana de la acción de Palatini en n dimensiones, que no involucra constricciones de segunda clase, lo cual se logra a partir de una elección apropiada de las variables que definen la acción, separando la parte dinámica de la no dinámica.

Trabajos futuros

En El presente articulo no se logró el objetivo principal (establecer una relación directa con la formulación ADM), debido a la dificultad del mismo, dicho objetivo se dejará como incentivo para trabajos futuros. Sin embargo, ya que la cantidad de grados de libertad por punto del espacio involucrados en la teoría están en concordancia con los obtenidos por la formulación ADM, es factible encontrar una relación entre las mismas (más precisamente una relación entre la constricción escalar y la de difeomorfismos espaciales, con las que surgen en el formalismo ADM). Con el fin de efectuar esta relación, se propone definir nuevas variables a partir de las ya establecidas en la sección 2, de forma que sean escalares bajo SO(σ) (dado que las variables ADM presentan esta condición), para luego reescribir todo en términos de estas nuevas variables, reduciendo el espacio de fases. De este modo, se pretende hacer contacto con la formulación ADM sin realizar una fijación de norma temporal “time gauge” (en las siguientes Ref’s. [Montesinos, M et al (2020), P. peldan (1994)], se expone la aplicación de este método), puesto que, al involucrar una fijación de norma temporal se rompe la covarianza manifiesta, debido a la reducción del grupo SO(σ) a SO(n 1) (el grupo de rotaciones) y se introducen constricciones de segunda clase.

Referencias

Montesinos, M., Escobedo, R., Romero, J., & Celada, M. (2020). Canonical analysis of n -dimensional Palatini action without second-class constraints. Physical Review D, 101(2). https://doi.org/10.1103/PhysRevD.101.024042

Merced Montesinos, Ricardo Escobedo, Jorge Romero, and Mariano Cela- da. Canonical analysis of n-dimensional palatini action without second-class constraints. Phys. Rev. D, 101:024042, Jan 2020.

A. Einstein. Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. In Albert Einstein: Akademie-Vorträge, pages 8–64. Wiley, dec 2006.

A. Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. In Albert Einstein: Akademie-Vorträge, pages 88–92. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, FRG, sep 2006.

Sean M. Carroll. Lecture Notes on General Relativity. arXiv:gr-qc/9712019, dec 1997.

M. Nakahara. Geometry, Topology and Physics, Second Edition. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.

A. Einstein. Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemei- nen Relativitätstheorie. In Albert Einstein: Akademie-Vorträge, pages 78–87. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, FRG, sep 2006.

JJ O'Connor and EF Robertson. General relativity. may 1996.

The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, The LIGO Scien- tific Collaboration, the Virgo Collaboration, B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, et al. arXiv:1602.03840, feb.

Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. The Astrophysical Journal, 875(1):L1, apr 2019.

Mendoza, J. A. ., L´opez, J. C., & Mendoza Suarez, R. . (2020). Análisis del comportamiento de un potencial lineal al solucionar la ecuación de Schrödinger. BISTUA Revista De La Facultad De Ciencias Básicas, 18(2), 34-37. https://doi.org/10.24054/bistua.v18i2.825

Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. Republication of: The dynamics of general relativity. Gen. Relativ. Gravit., 40(9):1997, 2008.

Thomas Thiemann. Introduction to Modern Canonical Quantum General Re- lativity. arXiv:gr-qc/0110034, 2008.

Darío Núñez et al. Introducción al formalismo adm. Revista Mexicana de Física, 37(4):720–747, 1990.

J. Fernando Barbero G. Real Ashtekar variables for Lorentzian signature space-times. Phys. Rev. D, 51(10):5507–5510, 1995.

Giorgio Immirzi. Real and complex connections for canonical gravity. Classi- cal and Quantum Gravity, 14(10):L177–L181, oct 1997.

Peter Peldán. Actions for gravity, with generalizations: A title. Classical and Quantum Gravity, 11(5):1087–1132, 1994.

Merced Montesinos, Diego González, Mariano Celada, and Bogar Díaz. Re- formulation of the symmetries of first-order general relativity. Classical and Quantum Gravity, 34(20):205002, 2017.

Merced Montesinos, Diego Gonzalez, and Mariano Celada. The gauge symme- tries of first-order general relativity with matter fields. Classical and Quantum Gravity, 35, 9 2018.

Mariano Celada, Diego González, and Merced Montesinos. BF gravity. Clas- sical and Quantum Gravity, 33(21):213001, 2016.

Sören Holst. Barbero's Hamiltonian derived from a generalized Hilbert- Palatini action. Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cos- mology, 53(10):5966–5969, 1996.

Nuno Barros E Sá. Hamiltonian analysis of general relativity with the immirzi parameter. International Journal of Modern Physics D, 10(03):261–272, jun 2001.

Merced Montesinos, Jorge Romero, and Mariano Celada. Revisiting the so- lution of the second-class constraints of the holst action. Phys. Rev. D, 99:064029, Mar 2019.

Matthias Blau. Lecture Notes on General Relativity. Albert Einstein Center for Fundamental Physics, 2011.

Kurt Sundermeyer. Constrained dynamics (lecture notes in physics 169).Sprlnger-Verlag, Berlin, 1982.

Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. Physical Review, 116(5):1322, 1959.

Merced Montesinos, Jorge Romero, and Mariano Celada. Manifestly Lorentz- covariant variables for the phase space of general relativity. Phy. Rev. D, 97(2), nov 2018.

Merced Montesinos and Mariano Celada. Canonical analysis with no second- class constraints of BF gravity with immirzi parameter. Phys. Rev. D, 101:084043, Apr 2020.

Merced Montesinos, Jorge Romero, and Mariano Celada. Canonical analysis of holst action without second-class constraints. Phys. Rev. D, 101:084003, Apr 2020.

M. Blagojević. Gravitation and Gauge Symmetries. Series in high energy physics, cosmology, and gravitation. Institute of Physics Pub., 2002.