

## SOLUCIÓN “WAIT AND SEE” PARA EL PROBLEMA DE RUTEO ABIERTO DE VEHÍCULOS CON DEMANDAS ESTOCÁSTICAS BAJO UN ESQUEMA DE ESTIMACIÓN POR PUNTOS.

### A “WAIT AND SEE” SOLUTION FOR THE OPEN VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH STOCHASTIC DEMANDS UNDER A POINT ESTIMATION SCHEME.

Ing. Alejandro Ospina Castaño\*, Ph.D. Eliana Mirledy Toro-Ocampo\*\*  
Ph.D. Ramón Alfonso Gallego-Rendón\*\*\*

\*,\*\*\* Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ingenierías, Programa de Ingeniería Eléctrica.

Cra. 27 ##10-02, Pereira, Risaralda, Colombia  
PBX: +57 6 3137300

E-mail: {aopsina, ragr}@utp.edu.co

\*\* Universidad Tecnológica de Pereira, Facultad de Ciencias Empresariales, Programa de Ingeniería Industrial Cra. 27 ##10-02, Pereira, Risaralda, Colombia

PBX: +57 6 31373205

E-mail: elianam@utp.edu.co

**Resumen:** En este artículo se propone una técnica de solución estocástica bajo un esquema “*wait and see*” para abordar los siguientes problemas de ruteo con demandas estocásticas: CVRPSD y OVRPSD. La técnica de solución ha venido siendo aplicada en los últimos diez años al problema de flujo de carga estocástico en redes de distribución de energía eléctrica. El objetivo de la técnica es encontrar un valor esperado de costos operativos con su respectiva desviación estándar a partir de  $2J$  escenarios probabilísticos desacoplados, siendo  $J$  el número de clientes en un escenario estocástico. Para su verificación se usan instancias propuestas en la literatura del VRP, observándose la influencia que ejerce en los costos operativos la estocasticidad de la demanda.

**Palabras clave:** Demanda estocástica, estabilidad, método de estimación por 2 puntos, ruteo abierto, ruteo de vehículos, solución wait and see.

**Abstract:** This paper proposes a stochastic solution technique under a “*wait and see*” scheme to address the following routing issues with stochastic demands: CVRPSD and OVRPSD. The solution technique has been applied in the last ten years to the stochastic load flow problem for electric power transmission networks. The main goal of the technique is to find an expected value of operating costs with their respective standard deviation from  $2J$  decoupled probabilistic scenarios, with  $J$  being the number of customers with stochastic demands. Proposed instances of the VRP literature are used for verification, and it is found that operating costs increase due to the presence of stochastic demands.

**Keywords:** Stochastic demand, stability, 2-point estimate method, open routing, vehicle routing, wait and see solution.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema de ruteo de vehículos capacitado con demandas estocásticas (CVRPSD, por sus siglas en inglés *Capacitated Vehicle Routing Problem with*

*Stochastic Demands*), al igual que el CVRP es un problema de complejidad computacional NP-hard, lo que significa que no existe una metodología que lo resuelva en tiempos razonables para determinar la solución óptima, (Ospina-Toro, D., Toro-

Ocampo, E. M., & Gallego-Rendón, R.A., (2018). El CVRPSD es representado por un grafo conexo  $E=G(V,A)$  siendo  $V$  el número total de vértices, y  $A$  el conjunto de arcos o aristas que conectan cada uno de los vértices, cumpliendo que:  $A \subseteq \{vi, vj / vi, vj \in V : vi < vj\}$ . Una matriz simétrica de distancias equivalentes al costo es definida en el plano euclidiano como  $C=[C_{ij}]$ , siendo  $C_{ij}$  el costo o distancia de la arista que pasa por los vértices  $vi, vj \in V$  y definidas en el grafo  $E$ . Cada cliente  $vi$  posee una demanda estocástica  $Dv_i$  no negativa diferente de cero que debe ser satisfecha o recolectada, y solo se conoce antes de la operación o en el momento que se visita. El VRP es clasificado como un problema de alta complejidad matemática, en estas condiciones las técnicas aproximadas se proponen como una buena alternativa de solución.(Toth & Vigo, 2002). Investigaciones como la realizada por Ospina Castaño, A. Toro-Ocampo, E. M. & Gallego-Rendón, R. A., 2019 sugieren que factores como el estado de la vía deben ser consideradas, sin embargo existen otros estudios que también están siendo analizados y que garantizan confiabilidad en la etapa de entrega del producto final, es así como el CVRPSD es de interés tanto para la comunidad académica y empresarial por sus aplicaciones prácticas en la medición del nivel del servicio y satisfacción del cliente final (Perboli, Rosano, Saint-Guillain, & Rizzo, 2018). Autores como (Stewart & Golden, 1983), (Laporte, Louveaux, & Mercure, 1989), (Gendreau & Laporte, 1996) aclaran que la dificultad al resolver el VRP estocástico depende del número de consideraciones sobre el problema, razón por la cual el CVRPSD ha recibido menos atención que el CVRP.

Una consecuencia directa de las demandas estocásticas puede ser el exceso de demanda de los clientes, aspecto que afecta directamente la capacidad disponible de los vehículos y el número de rutas que se deben programar comparado con el análisis determinístico. Bajo ese tipo de escenarios suceden fallos de ruta y es necesario implementar una política o acción de recurso que minimice los mismos (Bertsimas, 1992). Bertsimas propone una política de recurso basada en retornos al depósito en casos donde el vehículo no satisface la demanda del cliente en algún punto de la ruta, y después de un reabastecimiento, el vehículo retorna hasta el nodo donde ocurrió el fallo y continua su ruta planeada. En (Birge & Louveaux, 2011) se plantean 2 estrategias adicionales para la solución del VRPSD. La primera estrategia “espere y mire” se basa en conocer con antelación la demanda de cada cliente, para programar la ruta. La segunda

estrategia “reoptimización” consiste en el resecuenciamiento óptimo de clientes no visitados cada vez que un vehículo visita un nuevo nodo, es decir, el VRPSD se formula como un proceso de decisión markoviano (Secomandi & Margot, 2008). (Laporte & Louveaux, 1998) plantean el VRPSD como un problema lineal entero-mixto estocástico de 2 etapas, y proponen un algoritmo de descomposición *Branch and Bound* a través del *L-shaped*. Para resolver el problema se consideran demandas independientes e idénticamente distribuidas. La función de recurso  $Q(x)$  se modela bajo la estrategia de optimización a priori a partir del costo esperado por fallo en ruta. Los autores proponen cortes de optimalidad que surgen a partir de las propiedades planteadas por (Bertsimas, 1992) para el VRPSD y se demuestra que los cortes propuestos funcionan de forma estable en el modelo lineal-entero-mixto bi-etapa.

Posteriormente (Laporte, Louveaux, & van Hamme, 2002) mejoran de manera significativa la metodología planteada al introducir en el modelo lineal, desigualdades válidas que surgen del análisis hecho por (Hjorring & Holt, 1999) sobre el concepto de rutas parciales. Por otro lado, (Christiansen & Lysgaard, 2007) modelan el VRPSD como un “*set partitioning*” cuyo modelo de segunda etapa  $Q(x)$  es el mismo que utiliza (Hjorring & Holt, 1999) y (Laporte et al., 2002). El modelo es resuelto a través del algoritmo *Branch and Price*. Los autores resuelven una serie de instancias de mediana complejidad matemática tomadas de (Augerat, 1995), para el conjunto  $A$  y  $P$ , y las del conjunto  $E$  propuestas por (Christofides and Eilon, 1969). Adicionalmente se demuestra que el algoritmo es mucho más estable que el de (Laporte et al., 2002). (Gauvin, Desaulniers, & Gendreau, 2014) proponen una mejora al algoritmo anterior usando la técnica híbrida *Branch and Cut and Price*. Como resultado, obtienen mejoras en tiempos de cómputo y calidad de solución sobre 38 instancias de las 40 evaluadas.

En este artículo, se propone el tipo de solución “*wait and see*” basado en una técnica estocástica de estimación de demanda que permite resolver *The Open vehicle routing problem with Stochastic Demand* (OVRPSD) y el CVRPSD. El esquema es aplicado en diversos casos en los que se requiere conocer un estimado de costos operativos a través de 2J escenarios probabilísticos desacoplados. Para validar la metodología se usan instancias tradicionales de la literatura VRP.

## 2. MÉTODO DE ESTIMACIÓN POR DOS PUNTOS

(Rei, Gendreau, & Soriano, 2010) presentan una primera aproximación sobre técnicas de estimación al emplear un algoritmo que combina la técnica de simulación de Montecarlo y la ramificación local para resolver el problema de ruteo estocástico. El método de estimación por puntos es una técnica que evalúa los momentos de salida de una variable aleatoria. Esta técnica fue ampliamente estudiada por (Hong, 1998) para análisis probabilístico. El esquema adaptado al problema de ruteo en este artículo es  $2J$  simulaciones para  $J$  variables de entrada, siendo  $J$  el número de clientes con distribución de probabilidad conocida. El estimador por puntos concentra la información estadística en  $K$  puntos por cada variable aleatoria, también llamados estimados (Arias Hernández, Hincapié Isaza, & Gallego Rendón, 2014). El objetivo del método es conocer dos valores estimados de demanda por cada cliente  $i \in J$  con sus respectivas probabilidades o pesos relativos. Sobre los puntos obtenidos se resuelve un problema desacoplado en  $2J$  (donde  $J$  representa el número de clientes) así: para cada cliente se toma el valor de los dos puntos y los demás clientes toman el valor de su respectiva media. Luego, sobre cada punto se resuelve el modelo determinístico de ruteo.

En la metodología propuesta se asume que la demanda  $X_i$  ( $i \in J$ ) es representada a través de una distribución de probabilidad  $f_{X_i}(X_i) = P(X_i = x)$ , con media  $\mu_{X_i}$  y desviación estándar  $\sigma_{X_i}$ , además,  $Z_i(k) = R(X_i)$  representa una función de salida que está en función del cliente  $i$  con demanda  $X_i$ . En la mayoría de los casos  $R(X_i)$  es una función no lineal, y por tal motivo se linealiza a través de una expansión por series de Taylor alrededor de la media de la variable  $X_i$  como se muestra en (1).

$$R(X_i) = R(\mu_{X_i}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} R^{(j)}(\mu_{X_i})(X_i - \mu_{X_i})^j \quad (1)$$

$$\text{Se define } R^{(j)} = \frac{d^j R}{dX_i^j}$$

Los estimados de  $X_i$ , o los  $P_{i,k}$ , son calculados a través de la expresión (2).

$$P_{i,k} = \mu_{X_i} + L_{i,k} \sigma_{X_i} \quad (2)$$

El valor esperado de  $R(X_i)$  es determinado en función de sus estimados  $P_{i,k}$  con sus respectivas probabilidad o pesos relativos  $W_{i,k}$ , como se muestra en la ecuación (3) (Hong, 1998):

$$\mu_Z \cong \sum_{k=1}^K W_{i,k} R(P_{i,k}) \quad (3)$$

Para conocer el valor esperado de la función de salida, es necesario conocer los valores de  $W_{i,k}$  y  $L_{i,k}$ ,

correspondiendo este último a las localizaciones estándares de la variable aleatoria  $X_i$ . Para encontrar los parámetros nombrados se redefine (3) a través de su valor esperado, como se muestra en (4) (Arias Hernández et al., 2014).

$$\mu_Z = E(R(X_i)) = \int_{-\infty}^{\infty} R(X_i) * f_{X_i}(X_i) dX_i \quad (4)$$

Al sustituir (1) en (4) se obtiene (5):

$$\mu_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R(\mu_{X_i}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} R^{(j)}(\mu_{X_i})(X_i - \mu_{X_i})^j \right] * f_{X_i}(X_i) dX_i \quad (5)$$

Al ser  $R(\mu_{X_i})$  y  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} R^{(j)}(\mu_{X_i})$  términos constantes, la expresión (5) se reescribe a través de (6) como:

$$\mu_Z = R(\mu_{X_i}) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} R^{(j)}(\mu_{X_i}) * M_j(X_i) \quad (6)$$

Donde  $M_j(X_i)$  se define como  $j$ -ésimo momento central de la variable aleatoria  $X_i$  alrededor de su media  $\mu_{X_i}$ , y su expresión matemática queda definida en (7) así:

$$M_j(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} (X_i - \mu_{X_i})^j f_{X_i}(X_i) dX_i \quad (7)$$

$M_j(X_i)$  se expresa mediante (8) como una proporción matemática en función de factores estadísticos  $\lambda_{X_i,j}$  usados en el análisis probabilístico.

$$M_j(X_i) = \lambda_{X_i,j} * \sigma_{X_i}^j \quad (8)$$

Al reemplazar  $j$  por 0, 1 y 2 en (7) encontramos los momentos de orden cero, uno y dos respectivamente, cuyos factores estadísticos según (8) son:  $\lambda_{X_i,0} = 1$ ,  $\lambda_{X_i,1} = 0$  y  $\lambda_{X_i,2} = 1$ . Con el momento de tercer y cuarto orden encontramos los coeficientes  $\lambda_{X_i,3}$  y  $\lambda_{X_i,4}$  definidos como coeficiente de Asimetría y Kurtosis. Una vez establecidos los  $k$  factores estadísticos  $\lambda_{X_i,k}$  ( $k=1,2,\dots,K$ ), el siguiente paso es hallar las ubicaciones estándares  $L_{i,k}$  y los pesos relativos  $W_{i,k}$  de la variable aleatoria  $X_i$ . Para ello, se hace una aproximación matemática que consiste en usar la expresión (1) y (2), y sustituirlas en (3) para obtener (9).

$$\mu_Z = \sum_{k=1}^K W_{i,k} R(P_{i,k}) = R(\mu_{X_i}) \sum_{k=1}^K W_{i,k} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{j!} R^{(j)}(\mu_{X_i}) \left( \sum_{k=1}^K W_{i,k} L_{i,k}^j \right) \sigma_{X_i}^j \right] \quad (9)$$

Por inspección  $\lambda_{X_i,j}$  puede ser expresado matemáticamente mediante (10) así:

$$\lambda_{X_{ij}} = \sum_{k=1}^K W_{i,k} L_{i,k}^j$$

$$\forall i = 1, 2, \dots, J, j = 1, 2, \dots, 2K - 1 \quad (10)$$

Se cumple que la suma de los pesos por cada variable aleatoria según (11) es:

$$\sum_{k=1}^K W_{i,k} = \frac{1}{J} \quad \forall i = 1, 2, \dots, J \quad (11)$$

En (10) y (11) se forma un sistema de  $2K$  ecuaciones con  $2K$  incógnitas ( $\lambda_{X_{ij}}$  son conocidos). Para este caso en particular se asume  $K=2$  con lo cual se obtienen 3 momentos centrales y un único factor estadístico de interés denominado asimetría ( $\lambda_{X_{i2}}$ ). Así, la solución de los sistemas de ecuaciones se muestra en (12) y (13) (Hong, 1998):

$$L_{i,1} = \frac{\lambda_{X_{i2}}}{2} + \sqrt{J + \left(\frac{\lambda_{X_{i2}}}{2}\right)^2}$$

$$L_{i,2} = \frac{\lambda_{X_{i2}}}{2} - \sqrt{J + \left(\frac{\lambda_{X_{i2}}}{2}\right)^2} \quad (12)$$

&

$$W_{i,1} = -\frac{1}{J} \left( \frac{L_{i,2}}{L_{i,2} - L_{i,1}} \right)$$

$$W_{i,2} = \frac{1}{J} \left( \frac{L_{i,1}}{L_{i,1} - L_{i,2}} \right) \quad (13)$$

Así, son obtenidos los pesos y las localizaciones estándar de  $Z$ . Para el cálculo de los momentos centrales de la variable aleatoria de salida  $Z_i(k)$  [ $Z_i(k)=R(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, P_{i,k}, \dots, \mu_{J-1}, \mu_J)$ ] se usa (14) (Su, 2005).

$$E(Z_i(k)^j) \cong \sum_{i=1}^J \sum_{k=1}^2 W_{i,k} * [Z_i(k)]^j \quad (14)$$

Con  $j=1$ , se obtiene la media de la variable aleatoria de salida  $Z_i$  mostrada en (15).

$$\mu_{Z_i} = E(Z_i) \cong \sum_{i=1}^J \sum_{k=1}^2 W_{i,k} * Z_i(k) \quad (15)$$

La desviación estándar de la variable aleatoria de salida  $Z_i$  es calculada usando su primer y segundo momento central tal y como se presenta en (16):

$$\sigma_{Z_i} = \sqrt{\sigma_{Z_i}^2} = \sqrt{E(Z_i^2) - [\mu_{Z_i}]^2} \quad (16)$$

Para el caso de esta investigación,  $Z_i(k)=R(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, P_{i,k}, \dots, \mu_{J-1}, \mu_J)$  se usa el modelo presentado en (Toro-ocampo, 2016). El modelo propuesto se basa en las características topológicas de las redes de distribución de energía eléctrica y de transporte (Lavorato, Franco, Rider, & Romero, 2012), (Granada, M., Toro, E. M., & Gallego, R. 2019). Con base en lo anterior, es posible resolver los problemas tratados en este documento de manera

determinística mediante el procedimiento mostrado en la figura 1, diagrama de flujo determinístico (DFD).

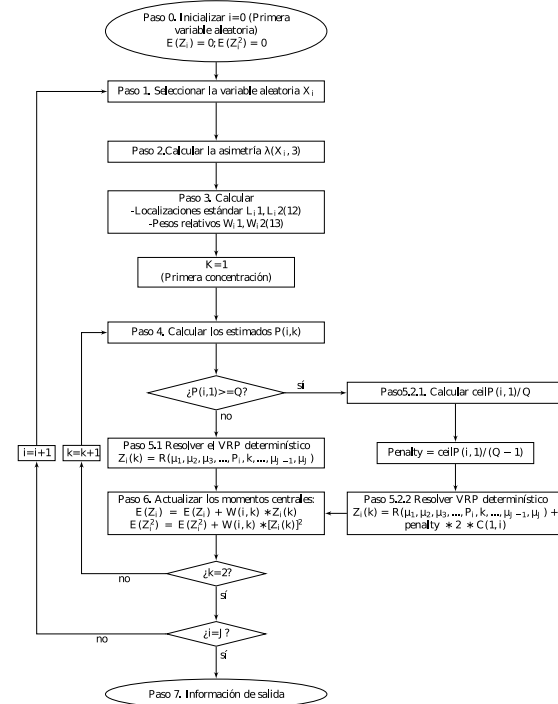


Figura 1. Diagrama de flujo determinístico.

Nótese que al tener el cliente  $i$  una demanda mayor a la capacidad del vehículo, la función de salida ( $Z_i(k)=R(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, Q, \dots, \mu_{J-1}, \mu_J)$  +  $Penalty*2*C_{li}$ ) es dividida en dos componentes según la figura 1, siendo  $R(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, Q, \dots, \mu_{J-1}, \mu_J)$  el costo operativo de atender al cliente  $i$  con un valor igual a  $Q$ , lo que significa que ese cliente es atendido por una sola ruta y de forma óptima.  $Penalty*2*C_{li}$  representa el número de rutas adicionales que deben atender al cliente  $i$  para terminar de satisfacer su demanda.

### 3. INTERPRETACION GRAFICA DEL MÉTODO DE LOS 2 PUNTOS

Según (Rosenblueth, 1981), la técnica de estimación por puntos requiere de  $2^J$  escenarios, donde  $J$  es el número de variables aleatorias. Los  $2^J$  puntos conforman un hiper-paralelepípedo cuyo centro determina la media de las variables aleatorias. El método de los dos puntos propuesto en este artículo reduce el número de escenarios a

2J. Estos puntos describen un hiper-elipsoide correspondiente a una proyección de los  $2^J$  puntos de Rosenblueth. Como se presenta en (17) con base en los reemplazos de las expresiones (3) y (12):

$$\frac{\left[X_i - \left(\mu_{X_i} + \frac{\sigma_{X_i} * \lambda_{3,X_i}}{2}\right)\right]^2}{\sigma_{X_i}^2 \left[J + \left(\frac{\lambda_{3,X_i}}{2}\right)^2\right]} = 1 \quad \forall i \in J \quad (17)$$

Para  $J$  variables aleatorias se tiene la expresión (18):

$$\sum_{i=1}^J \frac{\left[X_i - \left(\mu_{X_i} + \frac{\sigma_{X_i} * \lambda_{3,X_i}}{2}\right)\right]^2}{\sigma_{X_i}^2 \left[J + \left(\frac{\lambda_{3,X_i}}{2}\right)^2\right]} = 1 \quad (18)$$

El centro del hiper-elipsoide es:

$$c = \left[ \mu_{X_1} + \frac{\sigma_{X_1} * \lambda_{3,X_1}}{2}, \mu_{X_2} + \frac{\sigma_{X_2} * \lambda_{3,X_2}}{2}, \dots, \mu_{X_J} + \frac{\sigma_{X_J} * \lambda_{3,X_J}}{2} \right]$$

Siendo el radio de expansión en cada eje

$$X_i \quad \forall i \in J \quad \sigma_{X_i} \sqrt{\left[J + \left(\frac{\lambda_{3,X_i}}{2}\right)^2\right]}$$

Supóngase que el problema está compuesto por dos variables aleatorias ( $i=1,2$ ). Según la expresión (18) se obtiene la ecuación (19).

$$\frac{\left[X_1 - \left(\mu_{X_1} + \frac{\sigma_{X_1} * \lambda_{3,X_1}}{2}\right)\right]^2}{\sigma_{X_1}^2 \left[J + \left(\frac{\lambda_{3,X_1}}{2}\right)^2\right]} + \frac{\left[X_2 - \left(\mu_{X_2} + \frac{\sigma_{X_2} * \lambda_{3,X_2}}{2}\right)\right]^2}{\sigma_{X_2}^2 \left[J + \left(\frac{\lambda_{3,X_2}}{2}\right)^2\right]} = 1 \quad (19)$$

Y su interpretación grafica se presenta en la figura 2.

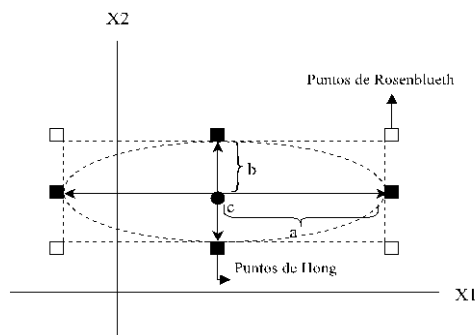


Figura 2. Localizaciones cartesianas de un problema con 2 variables aleatorias.

En la figura 2, a y b representan los radios de expansión de la elipse, y c el centro de la elipse circunscrito dentro del paralelepípedo formado por cuatro cuadrados blancos que corresponden a los  $2^J$  puntos de Rosenblueth. Los negros representan las

localizaciones de Hong usadas en la metodología propuesta.

#### 4. ANALISIS DE RESULTADOS

##### Definiciones:

**BKS:** *Best Known solution.* Mejor solución determinística conocida.

**A:** Primer momento de salida  $E(Z_i)^l$  equivalente al valor esperado de costo, o media.

**B:** Segundo momento de salida  $E(Z_i)^2$ .

**C:** Desviación estándar.

**D:** Tiempo computacional del CPLEX (segundos).

**E:** Promedio de GAP CPLEX en cada corrida (%).

En el problema planteado, se requiere conocer la cantidad de carga que solicita un conjunto  $J$  de clientes en un periodo de tiempo  $t$ , tal que la cantidad demandada por un cliente no depende de la cantidad demandada por otro. La demanda de los clientes es representada a través de la distribución de Poisson, ya que cumple con las condiciones establecidas por (Pfeiffer & Schum, 2014). Para cada cliente, el parámetro  $\mu$  corresponde a la media, es el mismo dado en la literatura especializada para el caso determinístico. Para el cálculo de la asimetría de la distribución Poisson se usa la definición matemática de Fisher según (20).

$$\lambda_{i3} = \frac{\sum_{n=1}^H (X_{i,n} - \mu_{X_i})^3 * Prob(X_{i,n})}{(\sigma_{X_i})^3} \quad (20)$$

Para llevar a cabo la implementación de la técnica se usa un sistema de 64 bits con procesador Intel® Core™ i5-3470 a 3.20 GHz y 8GB de memoria RAM. Tanto el modelo como el algoritmo son programados en AMPL (Fourer et al, 1993). Para resolver el problema general se usa un algoritmo *Branch and Cut* invocado a través del solver CPLEX.

Para el estudio del problema CVRPSD, se consideran instancias de 16 a 55 nodos y 2 a 10 vehículos tomadas de (Augerat, 1995) y adaptados al problema estocástico. Debido a que no existen históricos del problema, se toma una muestra aleatoria de 50 datos tipo Poisson, con parámetro  $\mu$  (demanda determinística). Los resultados obtenidos se presentan en la tabla 1.

Las muestras que se consideran corresponden al esquema  $J-1$ , donde  $J$  corresponde al número de clientes de la instancia, el escenario se crea cambiando la demanda de un cliente usando el generador pseudoaleatorio y la demanda de los



clientes restantes corresponde a la media o valor determinístico.

Adicionalmente es estudiado el OVRPSD. En este problema se usan instancias de 16 a 51 nodos y 2 a 10 vehículos, en las mismas condiciones que fue realizado el estudio del CVRPSD. Los resultados se presentan en la tabla 2.

Se corrobora que, para un número de observaciones grande, el valor esperado de la función objetivo se estabiliza porque el parámetro  $\lambda_{i,j}$  tiende a cero, cumpliéndose la ley de grandes números. Al ser una técnica basada en simulación de escenarios, se traduce como una técnica de solución “wait and see” ya que para rutear se necesita conocer las demandas estimadas de los clientes (Birge & Louveaux, 2011).

Tabla 1. Resultados CVRPSD.

Caso	BKS	A	B	C	D	E
P-n16-k8	450	453.5	206433.4	27.5	128	0
P-n19-k2	212	213.9	45865.0	10.4	64	0
P-n20-k2	216	222.6	49688.7	11.5	85	0
P-n21-k2	211	214.2	45906.5	5.4	80	0
P-n22-k2	216	224.6	50536.1	10.5	70	0
P-n23-k8	529	536.2	288376.3	28.9	9836	0
P-n40-k5	458	459.4	211067.6	3.2	70216	0
P-n45-k5	510	511.3	261417.1	4.1	437450	1.7
P-n50-k8	631	632.9	400665.0	9.5	674280	6.4
P-n50-k10	696	706.8	499803.3	13.5	663769	5.7
P-n51-k10	741	751.3	564687.2	14.8	654809	5.6
P-n55-k10	694	700.9	491406.2	9.8	713107	6.3

De la tabla 1 nótese que el valor esperado siempre es mayor al determinístico debido a la variación de costos por escenario. Por otro lado, la distribución de Poisson tiene la particularidad de que para parámetros  $\mu$  muy grandes ( $\geq 10$ ) el nivel de sesgo

tiende a cero ( $\lambda_{i,j} \approx 0$ ), lo que significa que se aproxima a una distribución normal.

Tabla 2. Resultados OVRPSD.

Caso	BKS	A	B	C	D	E
P-n16-k8	466	481.5	232669	28.4	10	0
P-n19-k2	312	312.7	97873.4	10.3	5	0
P-n21-k2	326	332.0	110294.0	7.5	6	0
P-n22-k2	332	340.4	115948.4	8.7	5	0
P-n23-k8	572	580.6	337881.3	28.5	140	0
P-n45-k5	776	776.9	603575.6	3.9	143	0
P-n50-k8	826	827.6	684886.0	5.9	35108	0
P-n50-k10	870	871.7	759945.7	8.1	75699	0
P-n51-k10	938	939.3	882365.0	9.9	107167	0

En la tabla 2 con cada instancia se realizan 150000 muestras Poisson, de las cuales se genera un subconjunto que contiene la muestra de demandas no repetidas. Esto se hace con el propósito de evitar errores de cálculo en la asimetría de cada distribución. Para el cálculo de la asimetría de cada demanda, los pasos 1 y 2 del DFD propuesto en la figura 1 son codificados en Matlab R2017b y posteriormente son enviados a AMPL a través de un código de conversión que se encuentra en:

“<https://es.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/39795-ampl-data-file-toolbox>”. En la figura 3 de muestra el desempeño analizando la instancia *Pn16-k8*, usando diferentes semillas, el valor esperado de la función objetivo se estabiliza en 481.52 si se realizan un número mayor a 50K.

En la figura 4 se presenta el comportamiento en escenarios con muestras menores a 50k usando la misma instancia *Pn16-k8* el cual corresponde a un sistema donde no se observa un valor estable de la función objetivo. De acuerdo con los resultados obtenidos el número de escenarios o muestras consideradas debe ser lo suficientemente grande para encontrar un valor estable.

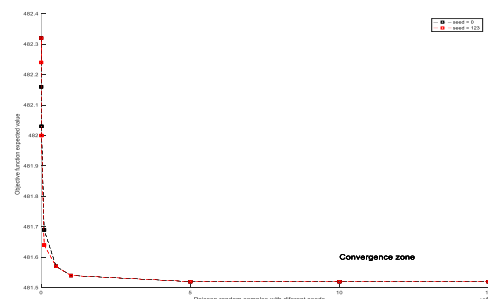


Figura 3. Caso P-n16-k8 abierto con semilla igual a 0 y 123 estable.

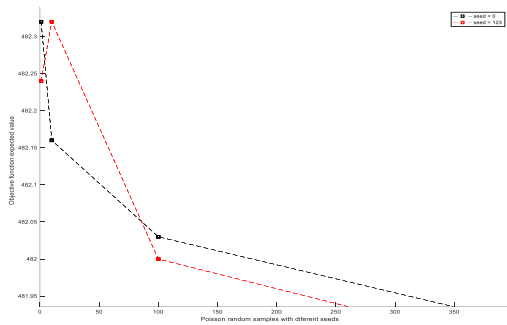


Figura 4. Caso P-n16-k8 abierto con semilla igual a 0 y 123 inestable.

Considerando la expansión de la expresión (20), y aplicando la función generadora de momentos en función de la media de la variable  $X_i$ , se comprueba que la asimetría tiende a  $1/\sqrt{\mu_{x_i}}$ . Sin embargo, esto solo se da cuando la distribución estudiada es Poisson, y el número de muestras es muy grande o tienda a infinito para que la asimetría de la distribución de probabilidad se aproxime a dicho valor.

## 5. CONCLUSIONES

Fue estudiada una metodología determinística a partir de un modelo de predicción de escenarios, basado en una técnica de estimación simple pero efectiva para la resolución del CVRP y OVRP con demandas estocásticas.

La metodología propuesta evalúa incrementos de los costos operativos en el transporte de mercancía, al presentarse cambios inesperados en la demanda en alguno de los clientes y permite adoptar un esquema de recurso simple basado en múltiples visitas a un cliente cuando la demanda de este excede la capacidad del vehículo.

La técnica desarrollada en este artículo se aborda desde un esquema “wait and see” para la resolución de problemas de ruteo con demanda estocástica usando el esquema de 2J escenarios probabilísticos.

Esta técnica puede ser adoptada por muchas empresas de distribución o entrega de mercancía que requieran de modelos de predicción de demanda.

Una situación que puede ser analizada es la aparición de clientes de forma aleatoria, lo que obliga a re-secuenciar la ruta de un vehículo, este escenario es muy frecuente en la distribución logística de última milla y podría ser abordado con esta propuesta metodológica.

## 6. REFERENCIAS

- Arias Hernández, A., Hincapié Isaza, R., & Gallego Rendón, R. (2014). Comparación de flujos de carga probabilísticos empleados en sistemas de distribución levemente enmallados. *Scientia et Technica*, 19(2), 153–162.  
<https://doi.org/10.22517/23447214.9025>
- Bertsimas, D. J. (1992). A Vehicle Routing Problem with Stochastic Demand. *Operations Research*, 40(3), 574–585.  
<https://doi.org/10.1287/opre.40.3.574>
- Birge, J., & Louveaux, F. (2011). *Introduction to stochastic programming* (second ed.; S. S. in O. R. and F. Engineering, ed.). Retrieved from  
<https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=Vp0Bp8kjPxUC&oi=fnd&pg=PR1&dq=louveaux&ots=q5DL4ZfdBD&sig=81Qoxw3SFjbwzDJEyZcne0ohYUo>
- Christiansen, C. H., & Lysgaard, J. (2007). A branch-and-price algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands. *Operations Research Letters*.  
<https://doi.org/10.1016/j.orl.2006.12.009>
- Fourer, R., Gay, D. M., & Kernighan, B. W. (1993). AMPL. A modeling language for mathematical programming.
- Gauvin, C., Desaulniers, G., & Gendreau, M. (2014). A branch-cut-and-price algorithm for the vehicle routing problem with stochastic demands. *Computers and Operations Research*, 50, 141–153.  
<https://doi.org/10.1016/j.cor.2014.03.028>
- Gendreau, M., & Laporte, G. (1996). EUROPEAN JOURNAL OF OPERATIONAL RESEARCH Stochastic vehicle routing. In *European Journal of Operational Research* (Vol. 88). Retrieved from  
[https://search.sut.ac.th:2535/037722179500050X/1-s2.0-037722179500050X-main.pdf?\\_tid=a99a9867-46a5-4ee1-b7ce-68cd9efcb5cd&acdnat=1548778238\\_f0e90e0fedb24ddca5a289b340a0b42](https://search.sut.ac.th:2535/037722179500050X/1-s2.0-037722179500050X-main.pdf?_tid=a99a9867-46a5-4ee1-b7ce-68cd9efcb5cd&acdnat=1548778238_f0e90e0fedb24ddca5a289b340a0b42)
- Granada, M., Toro, E. M., & Gallego, R. (2019). An MIP formulation for the open location-routing problem considering the

- topological characteristic of the solution-paths. *Networks*, 74(4), 374-388.
- Hjorring, C., & Holt, J. (1999). New optimality cuts for a single-vehicle stochastic routing problem. *Annals of Operations Research*, 86, 569–584. <https://doi.org/10.1023/A:1018995927636>
- Hong, H. (1998). An efficient point estimate method for probabilistic analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 59(3), 261–267. [https://doi.org/10.1016/S0951-8320\(97\)00071-9](https://doi.org/10.1016/S0951-8320(97)00071-9)
- Laporte, G., Louveaux, F., & Mercure, H. (1989). Models and exact solutions for a class of stochastic location-routing problems. *European Journal of Operational Research*, 39(1), 71–78. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(89\)90354-8](https://doi.org/10.1016/0377-2217(89)90354-8)
- Laporte, G., & Louveaux, F. V. (1998). Solving Stochastic Routing Problems with the Integer L-Shaped Method. In *Fleet Management and Logistics* (pp. 159–167). [https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5755-5\\_7](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5755-5_7)
- Laporte, G., Louveaux, F. V., & van Hamme, L. (2002). An Integer L -Shaped Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands. *Operations Research*, 50(3), 415–423. <https://doi.org/10.1287/opre.50.3.415.7751>
- Lavorato, M., Franco, J. F., Rider, M. J., & Romero, R. (2012). Imposing radiality constraints in distribution system optimization problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 27(1), 172–180. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2011.2161349>
- Ospina-Toro, D, Toro-Ocampo, E. M., & Gallego-Rendón, R. A. (2018). Solución Del MDVRP Usando El Algoritmo De Búsqueda Local Iterada. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, 1(31), 120–127. <https://doi.org/https://doi.org/10.24054/16927257.v31.n31.2018.2774>
- Ospina Castaño, A., Toro-Ocampo, E. M., & Gallego-Rendón, R. A. (2019). Sensibility Analysis for the MULTI-Objective MDVRPPC that Considering Cost and Environmental Impact. *Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada*, 2(34), 8.
- Perboli, G., Rosano, M., Saint-Guillain, M., & Rizzo, P. (2018). Simulation-optimisation framework for City Logistics: An application on multimodal last-mile delivery. *IET Intelligent Transport Systems*, 12(4), 262–269. <https://doi.org/10.1049/iet-its.2017.0357>
- Pfeiffer, P., & Schum, D. (2014). Introduction to applied probability. *Elsevier*. Retrieved from <https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=msDSBQAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=Paul+Pfeiffer+y+David+Schum.+Introductio+n+to+Applied+Probability.+Academic+Press,+1973.&ots=Q6Eak8RfOX&sig=SqlRyqAbnHz9dkhMsmGnEs4XCJk>
- Rei, W., Gendreau, M., & Soriano, P. (2010). A Hybrid Monte Carlo Local Branching Algorithm for the Single Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands. *Transportation Science*, 44(1), 136–146. <https://doi.org/10.1287/trsc.1090.0295>
- Rosenblueth, E. (1981). Two-point estimates in probabilities. *Applied Mathematical Modelling*, 5(5), 329–335. [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(81\)80054-6](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(81)80054-6)
- Secomandi, N., & Margot, F. (2008). Reoptimization Approaches for the Vehicle-Routing Problem with Stochastic Demands. *Operations Research*, 57(1), 214–230. <https://doi.org/10.1287/opre.1080.0520>
- Stewart, W. R., & Golden, B. L. (1983). Stochastic vehicle routing: A comprehensive approach. *European Journal of Operational Research*, 14(4), 371–385. [https://doi.org/10.1016/0377-2217\(83\)90237-0](https://doi.org/10.1016/0377-2217(83)90237-0)
- Su, C. L. (2005). Probabilistic load-flow computation using point estimate method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(4), 1843–1851. <https://doi.org/10.1109/TPWRS.2005.857921>
- Toro-ocampo, E. M. (2016). *Solución del problema de localización y ruteo usando un modelo matemático flexible y considerando efectos ambientales* (Universidad Tecnológica de Pereira).
- Toth, P., & Vigo, D. (2002). *The vehicle routing problem*.