

**APPLICATION OF LATTICE BOLTZMANN EQUATION METHOD TO THE  
BIDIMENSIONAL SIMULATION OF TYPICAL FLUIDS MECHANIC  
PROBLEM**

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN EN  
REDES PARA LA SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE UN PROBLEMA  
TÍPICO DE MECÁNICA DE FLUIDOS**

**PhD. Elkin G. Florez S.\***, **PhD. Cesar Augusto Peña Cortes\***  
**MSc. Raquel I. Laguado\*\***

\* **Universidad de Pamplona**, Facultad Ingenierías y Arquitectura, Dpto. MMI.

E-mail: {eflorez, cesarapc}@unipamplona.edu.co

\*\* **Universidad Francisco de Paula Santander**, Dpto. Ing. Industrial, Cúcuta-Colombia.

E-mail: raquelirenelr@ufps.edu.co

**Abstract:** A variety of fluid flow problems have analytical solutions and can be used as reference to validate solutions obtained from experimental and numerical methods. The Couette flow is one of these. Therefore, it is used in this study to validate the use of a relatively new numerical method. Conceptually, the simplest configuration and the used in this work is this where a fluid flows between two endless plates, parallels and separated from each other a distance, and in which one of they, as in most cases, the upper moves with constant velocity  $U_0$ . In the present work, using the lattice Boltzmann equation method, the Couette flow is simulated imposing a downstream pressure gradient and without it. The results are compared with existing analytical solutions (Navier-Stokes equations), those demonstrate the effectiveness of method and computational code developed by the authors to simulate this type of flow.

**Keywords:** Couette flow, numerical simulation, fluids mechanics.

**Resumen:** Existen diversos problemas de flujos de fluidos que cuentan con soluciones analíticas y que pueden ser utilizados como referencia para la validación de soluciones obtenidas a partir de métodos experimentales y numéricos. El flujo de Couette es uno de estos flujos, por lo tanto es utilizado en el presente trabajo para validar el uso de un método numérico relativamente nuevo. Conceptualmente, la configuración más sencilla y la utilizada en el presente trabajo es la de un fluido entre dos placas infinitas, paralelas y separadas entre sí una cierta distancia, y en la que uno de los platos, como en la mayoría de los casos, el superior se traslada con velocidad constante  $U_0$ . En el presente trabajo se simula, mediante el método de la ecuación de Boltzmann en redes (LBEM), dicho flujo de Couette imponiendo un gradiente de presión aguas abajo y sin dicho gradiente. Los resultados son comparados con las soluciones analíticas existentes (ecuaciones de Navier-Stokes), los cuales demuestran la efectividad del método y del código computacional desarrollado por los autores para la simulación de este tipo de flujo.

**Palabras clave:** Flujo de Couette, simulación numérica, mecánica de fluidos.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo se considera el flujo de Couette plano de un fluido newtoniano. Este flujo es estable con respecto a las perturbaciones de amplitud infinitesimal, el cual corresponde a la no presencia de un número de Reynolds crítico  $Re_c = \infty$  (Moyers y Frigaard, 2010). Nuestro interés es provocado por la necesidad de estudiar la eficacia de un método numérico relativamente novedoso, el método de la ecuación de Boltzmann en redes (LBEM), a la hora de solucionar problemas de flujos de fluidos newtonianos que cuentan con una solución analítica a partir de la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (NE).

A diferencia de los métodos utilizados en la mecánica de fluidos computacional (CFD) tradicionalmente (diferencias finitas, volúmenes finitos, etc.), el método de la ecuación de Boltzmann en redes no resuelve directamente las NE, ya que este modelo se construye sobre un espacio de redes o retículas que contiene partículas del fluido simulado. El LBEM es una herramienta exitosa utilizada, desde finales del siglo pasado, en la simulación numérica de diferentes sistemas hidrodinámicos. Éste se basa en la idea original de los autómatas celulares de gases en redes, (Frisch, *et al.*, 1986). Para simular el movimiento del fluido dentro de la retícula se utiliza un esquema mesoscópico, donde el paso del tiempo es unitario y existe una fase-espacio discreta. En el dominio reticular cada retícula representa un elemento volumen del fluido, este elemento de volumen consiste de un grupo de partículas, para las cuales, su movimiento está especificado por una función de distribución de partículas (FDP). En el modelo clásico la FDP es la distribución de Maxwell-Boltzmann. En cada paso de tiempo las partículas se mueven, de acuerdo al modelo seleccionado, hacia las retículas adyacentes (paso de propagación) y colisionan con otras partículas que vienen o viajan hacia la misma retícula de diferentes direcciones (paso de colisión). Las variables macroscópicas, como la densidad y la velocidad, son calculadas a partir de las FDP (Maxwell, 1997; Dieter, 2000).

El flujo analizado en el presente trabajo es llamado de esta forma en honor al físico francés, Maurice Marie Alfred Couette (1858-1943). En mecánica de fluidos este flujo hace referencia al flujo laminar producido por un fluido viscoso contenido entre dos paredes, donde una de las paredes se mueve con velocidad relativa a la otra, que está fija. Cuando no existe un gradiente de presión entre la

entrada y la salida del canal que contiene el fluido, el flujo es generado por las fuerzas de arrastre viscosas entre la pared móvil y el fluido. El perfil generado es como el que muestra el lado izquierdo de la Figura 1. El perfil de velocidad es lineal y se extiende desde cero en la pared inferior (estática) hasta la velocidad  $U_0$  de la pared superior (dinámica). Existe también otra configuración del flujo de Couette, y ésta se da cuando, además del movimiento de la pared superior, se induce un gradiente de presión entre la entrada y la salida del flujo, generando un perfil semi-parabólico como el que se muestra en la parte derecha de la Figura 1.

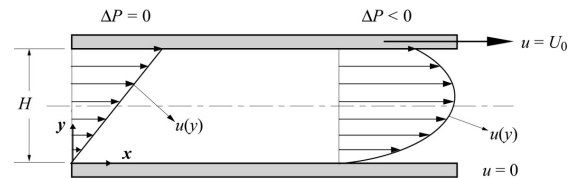


Fig. 1. Flujo de Couette: sin y con gradiente de presión entre la entrada y la salida

## 2. DERIVACIÓN DE LA ECUACIÓN DE BOLTZMANN EN REDES.

Sin la inclusión de fuerzas externas la ecuación de Boltzmann con el modelo de colisión propuesto por Bhatnagar-Gross-Krook (1954), es la que muestra la expresión (1)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{1}{\tau} (f - f^{(eq)}) \quad (1)$$

Donde  $f = f(x, \mathbf{v}, t)$  es la función de distribución en el espacio fase continuo,  $\mathbf{v}$  es la velocidad discreta definida dentro de la retícula o nodo,  $\tau$  el tiempo de relajación relacionado con la viscosidad del fluido y  $f^{(eq)}$  es la función de distribución de equilibrio. Utilizando como función de equilibrio a la función de distribución de Maxwell-Boltzmann, definida por:

$$f^{(eq)} = \frac{\mathbf{r}}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-u)^2}{2RT}\right) \quad (2)$$

que por facilidad se denomina de ahora en adelante  $g$ , donde  $T$  es la temperatura,  $R$  es la constante del gas,  $D$  es la dimensión espacial, que para el propósito del presente trabajo corresponde a 2 (simulación bidimensional), y  $u$  es la velocidad macroscópica del flujo, permite convertir la ecuación (1) a.

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\lambda} f = \frac{1}{\lambda} g \quad (3)$$

Donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi \cdot \nabla \quad (4)$$

Es la derivada total a lo largo de la línea característica definida por  $\xi$ . La ecuación (4) puede ser formalmente integrada sobre un paso de tiempo  $\tau$ :

$$f(x + \mathbf{x}\Delta t, \mathbf{x}, t + \Delta t) = \frac{1}{I} e^{-\Delta t/I} \int_0^{\Delta t} e^{t'/I} g(x + \mathbf{x}t', \mathbf{x}, t + t') dt' + e^{-\Delta t/I} f(x, \mathbf{x}, t) \quad (5)$$

Asumiendo que  $\tau$  es lo suficientemente pequeño y  $g$  es, localmente, bien establecida, se puede hacer la siguiente aproximación, (He y Luo, 1997)

$$g(x + \mathbf{x}t', \mathbf{x}, t + t') = \left(1 - \frac{t'}{\Delta t}\right) g(x, \mathbf{x}, t) + \frac{t'}{\Delta t} g(x + \mathbf{x}\Delta t, \mathbf{x}, t + \Delta t) + O(\Delta t^2), \quad 0 \leq t' \leq \Delta t \quad (6)$$

Los términos de orden  $O(\tau^2)$  en la anterior aproximación se pueden despreciar. Con esta aproximación, la ecuación que muestra la ecuación (5) se transforma en:

$$f(x + \mathbf{x}\Delta t, \mathbf{x}, t + \Delta t) - f(x, \mathbf{x}, t) = (e^{-\Delta t/I} - 1) [f(x, \mathbf{x}, t) - g(x, \mathbf{x}, t)] + \left(1 + \frac{I}{\Delta t} (e^{-\Delta t/I} - 1)\right) \times [g(x + \mathbf{x}\Delta t, \mathbf{x}, t + \Delta t) - g(x, \mathbf{x}, t)] \quad (7)$$

Expandiendo el término  $e^{-\tau/I}$ , utilizando la expansión de Taylor y seguidamente despreciando los términos de orden  $O(\tau^2)$ , la ecuación definida en la expresión anterior se convierte en

$$f(x + \mathbf{x}\Delta t, \mathbf{x}, t + \Delta t) - f(x, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{I} [f(x, \mathbf{x}, t) - g(x, \mathbf{x}, t)] \quad (8)$$

Donde  $\tau = \tau/I$  es el tiempo de relajación adimensional (en la unidad de  $\tau$ ). Por lo tanto, la ecuación anterior es una aproximación de primer

orden en  $\tau$ . La ecuación (8) define la evolución de la función de distribución  $f$  en tiempo discreto. Aunque  $g$  se escribe como una función explícita de  $t$ , la dependencia del tiempo de  $g$  recae exclusivamente en las variables hidrodinámicas:  $\rho$  y  $u$  (Harris, 1971) y Dieter 2000).

Teniendo en cuenta que,  $\tau$  y  $\tau_x$  son el paso de tiempo y el tamaño de la malla, respectivamente, para una retícula de tamaño unitario,  $\tau_x = \tau = 1$  donde  $\xi$  es el vector unitario que determina la dirección de la velocidad discreta dentro de la retícula y recordando que  $g = f^{(eq)}$ , para una retícula con  $i$  velocidades discretas, la ecuación (8) llega a ser la ecuación de Boltzmann en redes estándar:

$$f_i(x + \mathbf{x}_i\Delta t, t + \Delta t) - f_i(x, t) = \frac{1}{\tau} [f_i(x, t) - f_i^{(eq)}(x, t)] \quad (9)$$

Como lo muestra Sterling y Chen (1996) el error de discretización tiene una forma especial el cual puede ser incluido dentro del término viscoso. La solución de la ecuación anterior da una exactitud de segundo orden para las variables macroscópicas en tiempo y espacio (Dieter, 2000).

### 3. MODELO LBEM HIDRODINÁMICO

La función de distribución de equilibrio ( $f_i^{(eq)}$ ) discretizada para el modelo de retícula utilizada en el presente trabajo (dos dimensiones y 9 velocidades discretas, D2Q9), está dada por, He y Luo (1997):

$$f_i^{(eq)} = w_i \left[ 1 + \frac{3}{c^2} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right] \quad (10)$$

Donde  $w_i$  es el factor de peso, que para el modelo D2Q9 está definido por:

$$w_i = \begin{cases} \frac{4}{9}, & i = 0 \\ \frac{1}{9}, & i = 1,2,3,4, \\ \frac{1}{36}, & i = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (11)$$

En el espacio de velocidad discreta la densidad ( $\rho$ ) y la cantidad de movimiento del flujo ( $\rho u$ ), como cantidades macroscópicas, pueden ser evaluadas por medio de Lallemand y Luo (1999).

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^8 f_i \quad (12)$$

$$\mathbf{r}u = \sum_{i=0}^8 \mathbf{e}_i f_i \quad (13)$$

Utilizando la ecuación de estado, la presión local en la retícula o nodo se obtiene de

$$P = \frac{\mathbf{r}k_B T}{m} = \mathbf{r}c_s^2 \quad (14)$$

Donde  $k_B$ , es la constante de Boltzmann. A demás, el parámetro de relajación  $t$  se relaciona con la viscosidad cinemática del fluido según la expresión

$$\mathbf{n} = \frac{c^2}{3} \left( \mathbf{t} - \frac{1}{2} \right) \quad (15)$$

Donde  $c = \Delta x / \Delta t = \Delta y / \Delta t = \Delta z / \Delta t$ , son la constante de retícula y el tamaño del paso de tiempo, respectivamente. Esta constante está relacionada con la velocidad del sonido en el sistema  $c_s$ , por medio de la ecuación de estado. Esto es, para el modelo D2Q9,  $RT = c_s^2 = c^2/9$  (He y Luo, 1997).

#### 4. CONDICIONES DE FRONTERA

En los LBEM como en cualquier método de simulación de fluidos se requiere implementar las condiciones de frontera que impone el flujo. Desde principios de los 90's en el siglo pasado diferentes autores, Skordos (1993), Chen *et al.* (1996), Zuo y He (1997), He *et al.* (1997), han presentado avances en la implementación de estas condiciones de frontera para la simulación de flujos de fluidos utilizando los métodos de la ecuación de Boltzmann en redes.

En las simulaciones típicas de la dinámica de flujos de fluido, hay cuatro cantidades macroscópicas (además de la energía) que se pueden especificar en la frontera de la malla o dominio, estas son: densidad, presión, y las dos componentes de la velocidad. Las dos primeras en los LBEM están directamente ligadas por la ecuación de estado, ecuación (14), por lo tanto, especificar una, es igual a hacerlo con la otra, y la velocidad, en las fronteras, es una expresión que en la mayoría de los casos es conocida para problemas comunes de mecánica de fluidos.

En las soluciones tradicionales de las ecuaciones de NS, se puede aplicar directamente las cantidades macroscópicas arriba mencionadas, por ejemplo: la correcta implementación de una condición de

frontera de velocidad, automáticamente conduce al correcto impulso de cantidad de movimiento cerca de la frontera, esto es debido a que el flujo es calculado utilizando diferencias finitas, volúmenes finitos, elementos finitos, etc. Por otra parte, en los LBEM solo se resuelve la ecuación para  $f_i$ , y en general la condición de frontera de una velocidad específica, no es suficiente para asegurar el campo de fuerzas en el flujo. Por lo anterior, el problema concreto reside en especificar los valores de las funciones de equilibrio en las retículas  $f_i$  (que componen la frontera), que permiten definir las cantidades macroscópicas respectivas.

A continuación se describen los tres tipos de condiciones de frontera utilizadas en el presente trabajo, y cómo son calculadas las respectivas funciones de equilibrio  $f_i$  para cada tipo de condición. Estas condiciones son: periódicas (para la entrada y salida de flujo), condición de pared móvil (para la pared superior del dominio), y finalmente, la condición de rebote sin deslizamiento conocido como el *bounce-back* (para la pared inferior que es estática).

##### 4.1 Condición de fronteras periódicas

La condición de *fronteras periódicas* o simplemente *periódicas*, como se conoce comúnmente, es la forma más sencilla de aplicar condiciones para la entrada y salida de flujos, utilizando cualquier metodología, en cuanto a la dinámica de fluidos computacional se refiere. Éstas consisten en mantener los valores de las cantidades físicas involucradas en el problema (velocidad, presión, temperatura, concentración, etc.), impuestas a un extremo del dominio, iguales a las de su lado o frontera opuesta. Estas condiciones, no tienen en cuenta cualquier perturbación que el flujo pueda presentar en sus fronteras, por lo tanto, son solo adecuadas para aplicar en fenómenos físicos donde los efectos de las superficies, donde se aplica la condición, no jueguen un papel importante en el desarrollo del flujo o donde no existan perturbaciones del flujo cerca de las fronteras mismas.

La implementación de este tipo de condición de frontera en los LEBM requiere, en el paso de propagación, que las propiedades a la salida del flujo retornen o se dirijan directamente a la entrada del mismo, y viceversa. Para un problema donde la longitud del flujo está dado por  $L = n$ , donde  $n$ = número de nodos en la dirección del flujo, la condición debe hacer cumplir, para una retícula D2Q9, que a la salida del flujo:

$$f(i, x=1, t) = f(i, x=n, t), \quad \text{Para } i = 1, 5 \text{ y } 8$$

Y a la entrada,

$$f(i, x=n, t) = f(i, x=1, t), \quad \text{Para } i = 3, 6 \text{ y } 7$$

En la anterior expresión, el subíndice  $i$  indica la respectiva dirección de la función de distribución discreta dentro de la retícula, y el subíndice  $t$  es el tiempo. Un ejemplo de la aplicación de condiciones de frontera periódicas se muestra en la Figura 2, utilizando un modelo de retícula D2Q9.

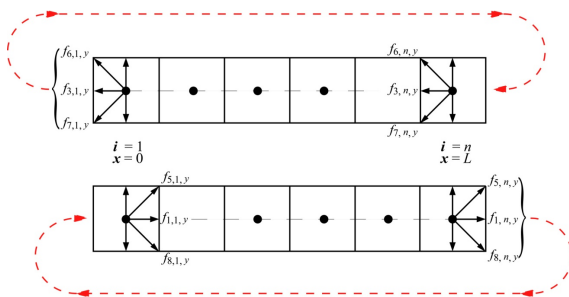


Fig. 2. Esquema de aplicación de la condición de fronteras periódicas, utilizando una retícula D2Q9.

#### 4.2 Condiciones de frontera para pared estática

Un fluido requiere de una frontera fija o estática, con quien interactúa continuamente, indispensable para transportarse y convertirse en un flujo. En los LBEM estas fronteras pueden estar ubicadas en el centro de la misma retícula o se puede ubicar entre dos retículas consecutivas. En la Figura 3 se muestran los dos ejemplos de ubicación de una frontera estática utilizados en el desarrollo de las simulaciones.

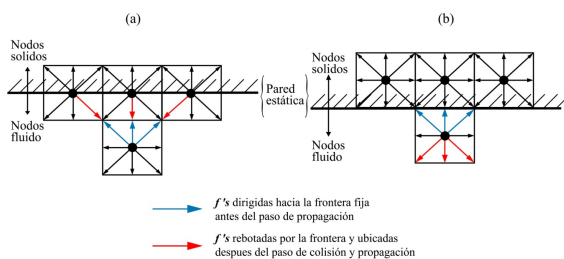


Fig. 3. “Bounce-back” con una pared estática, a) Pared sobre la misma retícula o nodo y b) Pared a medio camino entre retículas o nodos

Para tratar el paso de propagación, que involucra la solución de la ecuación (9), en las retículas vecinas a cualquier frontera del tipo pared estática, las  $f_i$ 's que se dirigen hacia dicha pared deben ser retornadas al dominio del flujo. Para ello se utiliza la aproximación lineal conocida como, rebote hacia

atrás “Bounce-back”. Esta aproximación, supone que las  $f_i$ 's que chocan con la pared estática son retornadas en la misma dirección pero en sentido contrario y sin pérdida de energía, lo que indica que el choque entre las  $f_i$ 's y la pared es un choque totalmente elástico. Teniendo como referencia la Figura 3, si se supone que  $x_i$  es un nodo o retícula fluido, se puede determinar que,  $x_i + e_i$  es un nodo sólido o pared estática, donde  $e_i$  representa la respectiva velocidad discreta dentro de la retícula. Para la condición descrita por el esquema (a) de la Figura 3, las  $f_i$ 's rebotadas son obtenidas mediante,

$$f_i(x_i + e_i, t + 1) = f_{i-2}(x_i, t) \quad \text{Para } i = 4, 7, 8 \quad (16)$$

Y para el esquema (b) de la misma Figura 3,

$$f_i(x_i, t + 1) = f_{i-2}(x_i, t) \quad \text{Para } i = 4, 7, 8 \quad (17)$$

#### 4.3 Condiciones de frontera para pared móvil

En los LBEM, para simular el comportamiento de un flujo, cuando éste interactúa con fronteras o paredes con velocidad diferente a cero, como es el caso de la pared superior del flujo simulado, la forma más sencilla es utilizar un argumento de primer orden, que introduce el aporte en cantidad de movimiento, de la frontera o pared móvil, a las funciones de distribución de fluido vecinas a la respectiva pared.

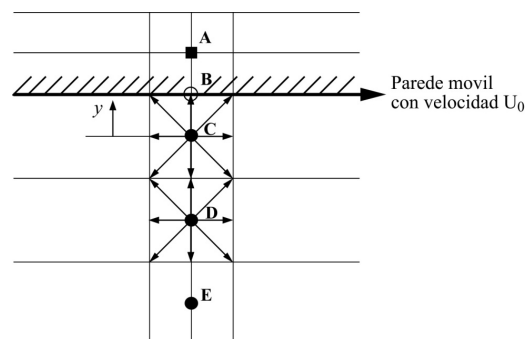


Fig. 4. Detalles del proceso de colisión con pared móvil, a medio camino entre retículas o nodos, utilizando el modelo D2Q9

Teniendo como referencia la Figura 4, si se asume que la velocidad macroscópica del fluido varía linealmente a lo largo de la recta AD y conociendo que la frontera o pared móvil tiene una velocidad  $U_0$  en el punto B y con el punto C como origen para la coordenada  $y$ , se tiene que:

$$u = U_0 + \left( y - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial U}{\partial y} \quad (18)$$



Para el primer orden en  $u$  los valores de equilibrio de las  $f_i$  están dados por

$$f_i = f_i^0 + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{U}, \quad (19)$$

Donde los coeficientes  $\mathbf{a}_i$  dependen del conjunto de velocidades discretas del modelo de retícula utilizada en los LBEM. Para el modelo D2Q9, el cual es el modelo utilizado en las simulaciones presentadas en el texto por los autores, los respectivos valores son

$$\mathbf{a}_i = \{0, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/12, 1/12, 1/12, 1/12\}$$

Para calcular los correspondientes valores de  $f_i$ , después de que estas se encuentran con la pared móvil, en las expresiones 16 y 17 se debe agregar al lado derecho de la ecuación el término:

$$df_i = 2 \mathbf{a}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{U}_0$$

Las deducciones anteriores demuestran que las fronteras móviles pueden ser simuladas aplicando un simple *Bounce-back* más un término adicional de cantidad de movimiento que agrega la pared móvil a las  $f_i$ 's, del dominio fluido, que interactúan con ella.

## 5. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL CAMPO DE VELOCIDAD DEL FLUJO

### 5.1 Flujo sin gradiente de presión

Para la configuración mostrada en la parte izquierda de la Figura 1, las ecuaciones de Navier-Stokes, teniendo en cuenta que el flujo es incompresible y estable, se reducen a:

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (20)$$

Donde  $y$  es la coordenada espacial normal a las paredes y  $u(y)$  la velocidad del flujo. Integrando dos veces la ecuación anterior y aplicando las condiciones de frontera:

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(H) = 0,$$

Se obtiene la solución analítica para  $u(y)$ ,

$$u(y) = U_0 \frac{y}{H} \quad (21)$$

### 5.2 Flujo con gradiente de presión

Para la configuración mostrada en la parte derecha de la Figura 1, las ecuaciones de Navier-Stokes, teniendo en cuenta que el flujo es incompresible, estable y que se ejerce un gradiente de presión constante  $\partial P / \partial x$ , entre la entrada y la salida del flujo, se reducen a

$$\frac{\partial^2 u(y)}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (22)$$

Además, las condiciones de frontera, para esta configuración, están dadas por

$$u(0) = 0 \quad \text{y} \quad u(H) = U_0.$$

Por lo tanto, se obtiene una solución, para la velocidad del flujo, de la forma

$$u(y) = U_0 \frac{y}{H} + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} y(y-H) \quad (23)$$

## 6. RESULTADOS

Conocidas las soluciones analíticas para las dos configuraciones mencionadas, del flujo de Couette, se realiza la simulación de dichos flujos utilizando el modelo D2Q9. El tamaño del dominio utilizado es  $N_x \times N_y = 300 \times 52$ , incluidos los nodos frontera. Para ambos casos se utiliza un mismo valor de parámetro de relajación  $t = 0,53$  que corresponde a una viscosidad cinemática  $\nu = 0,001$  en unidades LBM. La velocidad de la pared móvil es impuesta, con un valor de  $U_0 = 0,1$ , igualmente en unidades LBEM. La distribución de velocidad es graficada en forma adimensional, con  $y^* = y/H$ , y  $u^* = u/U_0$ , como una función del parámetro  $B = H^2(\partial P / \partial x) / 2\mu U_0$ . El valor del  $B$  es impuesto en 0,34. La altura del canal la define el número de nodos-fluido en la dirección vertical del canal,  $H = 50$ .

La solución numérica obtenida, con el código LBEM, para ambas configuraciones, es comparada con la solución analítica mostrada en las expresiones (21) y (23). Las condiciones iniciales impuestas corresponden a una velocidad nula para todos los nodos en el dominio del fluido. Como una forma de establecer el instante en que el flujo llega a su condición de estado estable, se grafica (ver Figura 5) la velocidad promedio contra el tiempo, calculada por medio de:

$$\bar{u} = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^N u_{x_i}}{N}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^N u_{y_i}}{N}\right)^2} \quad (24)$$

Donde  $u_x$  y  $u_y$  describen la velocidad en la dirección horizontal y vertical, respectivamente, para cada nodo, y  $N$  define el número total de nodos-fluido dentro del canal donde se desarrolla el flujo.

Además, según lo representado en la Figura 2, se puede concluir que, sin importar las condiciones de entrada/salida del flujo, la estabilidad en la simulación del flujo se alcanza, prácticamente, al mismo número de iteraciones para ambas configuraciones, sólo diferenciándose estas, en el valor de la magnitud de la velocidad promedio correspondiente.

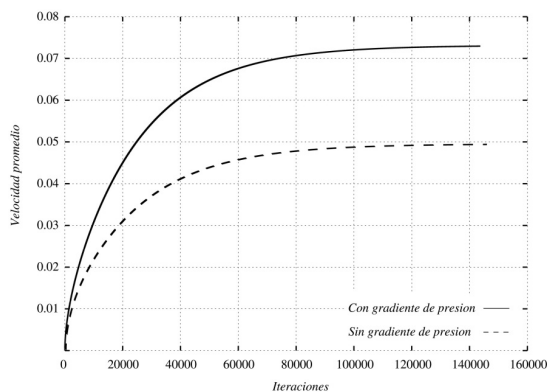


Fig. 5. Comportamiento de la velocidad promedio del flujo respecto el tiempo de simulación para el flujo de Couette.

En la Figura 6 se pueden observar los perfiles de velocidad, obtenidos en la simulación, comparados con las soluciones analíticas, los cuales permiten validar la exactitud alcanzada en la simulación del flujo y el excelente comportamiento del código desarrollado utilizando el LBEM, con un modelo de retícula D2Q9.

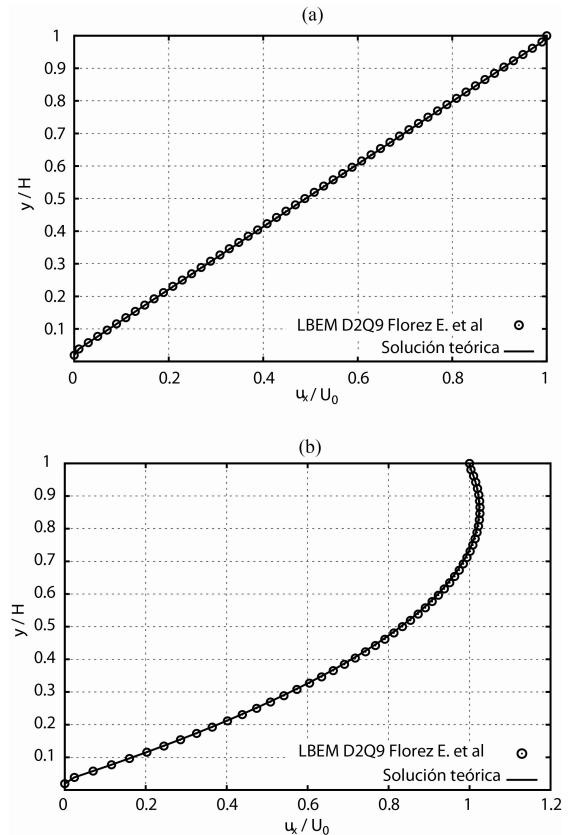


Fig. 6. Perfil de la velocidad horizontal a lo largo de una línea vertical del flujo de Couette. (a) Sin gradiente de presión. (b) Con gradiente de presión.

La Figura 7 muestra los campos de velocidad obtenidos en la simulación. Allí se observa que en ausencia del gradiente de presión en el flujo, la máxima velocidad que obtiene éste es la que presenta la capa de fluido que se encuentra junto a la pared móvil, condición de no deslizamiento (no-slip).

Por el contrario, cuando existe un gradiente de presión, la máxima velocidad en el flujo se presenta en un punto entre el centro del dominio y la pared móvil, más exactamente en la coordenada vertical adimensional igual a 0,83. La ubicación del punto donde se presenta el máximo valor de velocidad para el flujo de Couette con presencia de un gradiente de presión se puede obtener analíticamente de la manipulación de la ecuación (23), y está dada por:

$$y = \frac{H}{2} - \frac{U_0 \mu}{(\partial P / \partial x) H}$$

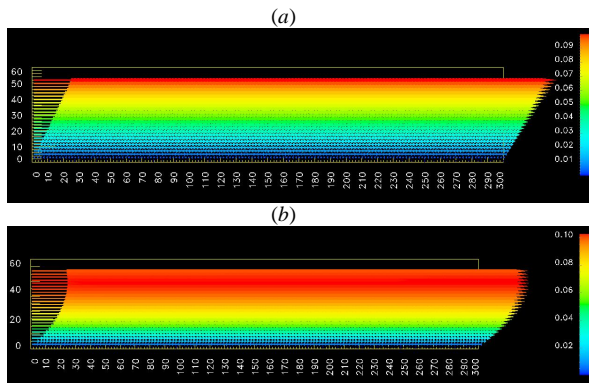


Fig. 7. Campo de velocidad para el flujo de Couette. (a) Sin gradiente de presión. (b) Con gradiente de presión.

## 7. CONCLUSIONES

Se ha presentado una solución numérica del flujo bidimensional de Couette utilizando el método de la ecuación de Boltzmann en redes. Los resultados han sido comparados con la solución analítica existente, mostrando que este método es una herramienta eficiente y de gran exactitud en la simulación de este tipo de flujo.

En la simulación del flujo de Couette se observó que para un mismo valor en el parámetro de relajación ( $t$ ), la exactitud de la simulación recae en el tamaño de la malla. A mayor número de nodos dentro del dominio menor es el error en cuanto al cálculo de las variables macroscópicas, tales como densidad y velocidad. Lo anterior teniendo en cuenta que la malla no puede llegar a tamaños tan grandes que viole el mínimo valor que debe tener dicho parámetro de relajación ( $t > 0,5$ ), según lo estipulado en la ecuación (19).

La utilización de este tipo de método (modelo mesoscópico) despierta el interés en los investigadores, docentes y estudiantes a seguir explorando en la solución de problemas que involucran la mecánica de fluidos de una forma diferente a la comúnmente utilizada metodología de discretización directa de las ecuaciones de Navier-Stokes (volúmenes finitos, diferencias finitas, elementos finitos, etc.)

## REFERENCIAS

- Las Bhatnagar, P.L., Gross, E.P., Krook. M. (1954), "A model for collision processes in gases. I Small amplitude processes in charged and neutral one-component system", *Phys. Rev.*, Vol. 94, pp. 511-525.
- Chen S. and Martinez D., Mei R. (1996), "On boundary conditions in lattice Boltzmann methods", *Phys. Fluids*, Vol. 8 (9), pp.2527-36.
- Dieter A. Wolf-Gladrow, *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models*, Bremerhaven-Germany, Springer (1ra. Ed), 2000, pp. 40-65
- Frisch U., Hasslacher B., and Pomeau Y. (1986), "Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation", *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 56, pp. 1505-1515
- Harris S., *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1971.
- He X., Luo L-S. (1997), "Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation". *Phys. Rev. E*, Vol. 56 (6), pp. 6811-6817.
- He X., Zuo Q., Luo L-S and Dembo M. (1997), "Analytic solutions of simple flow and analysis of nonslip boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model", *Journal of Statistic Physics*, Vol. 87 (1-2) pp.115-136.
- Lallemand P., Luo L-S, (1999), "Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability". *Phys. Rev. E.*, Vol. 61 (6), pp. 6546-6562.
- Maxwell B. J., *Lattice Boltzmann methods in Interfacial Wave Modelling*. Ph. D. Tesis. Edinburgh's University. 1997. P. 326
- Moyers-Gonzalez, Miguel; Frigaard Ian (2010) "The critical wall velocity for stabilization of plane Couette-Poiseuille flow of viscoelastic fluids" *Journal of Non-Newtonian Fluids Mechanics*, vol. 165, pp. 441-447
- Skordos P. A. (1993), "Initial and boundary conditions for the lattice Boltzmann method", *Phys. Rev E*. Vol. 48 (6), pp.4823-42.
- Sterling, J. D., Chen, S. (1996), "Stability analysis of lattice Boltzmann methods", *J. Comp. Phys*. Vol. 123, pp. 196-206.
- Zou Q., He X. (1997), "On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model", *Phys. Fluids*, Vol. 9 (6), pp. 1591-98.