

**IDENTIFICACIÓN POR FILTRO DE KALMAN Y CONTROL ADAPTATIVO  
POR REALIMENTACIÓN DE ESTADOS DE UN PUENTE DE GRÚA****IDENTIFICATION BY A KALMAN FILTER AND ADAPTIVE STATE  
FEEDBACK CONTROL OF A BRIDGE CRANE****MSc. Pablo Andrés Muñoz Gutiérrez<sup>\*,\*\*</sup>, Ing. Víctor Eduardo Ardila Lindo.<sup>\*\*</sup>  
PhD. Eduardo Giraldo Suarez.<sup>\*,\*\*</sup>****\* Universidad Tecnológica de Pereira**, Facultad de Ingeniería  
Maestría en ingeniería eléctrica y Doctorado en Ingeniería.

Vereda la Julita, Pereira, Risaralda, Tel.: (+576) 313 7300, Fax: (+576) 321 3206.

E-mail: egiraldos@utp.edu.co, veardila@utp.edu.co.

**\*\* Universidad del Quindío**, Facultad de Ingeniería, Grupo GAMA.

Cra. 15, No. 12N, Armenia, Quindío, Colombia, Tel.: (+576) 7359353.

E-mail: pamunoz@uniquindio.edu.co.

**Resumen:** En este artículo, se estudian técnicas de identificación y control en espacio de estado multivariable a nivel de simulación. Aplicadas a la planta puente de grúa *Feedback Digital Pendulum Mechanical Unit*, siendo este un sistema mecánico subactuado (menor número de entradas que salidas). Realizando identificación multivariable por el método de Kalman y el sistema de control adaptativo por realimentación de estados.

**Palabras clave:** Filtros de Kalman, control adaptativo, puente de grúa, espacio de estados

**Abstract:** In this article, we study identification techniques and multivariable state space control systems applied to a crane system *Feedback Digital Pendulum Mechanical Unit*. Being this sub-actuated mechanical system. We implement Kalman algorithm identification system and feedback space state control

**Keywords:** Kalman's filter, Adaptive control, Crane control, Space State

## 1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas subactuados son sistemas con mayor número de salidas que de entradas, en otras palabras son aquellos que tienen más grados de libertad que actuadores y donde generalmente se controlan los grados de libertad que carecen de actuador. Estos sistemas suelen tener menos grados de libertad controlables que grados de libertad totales, también llamados no holonómicos (Jiang Lefeber y Nijmeijer., 2001). Este tipo de sistemas son un reto, ya que se hacen más complicados de controlar en la medida en que aumente la diferencia entre el número de salidas y entradas. Adicionalmente se caracterizan por su no

linealidad, la cual genera otro reto de diseño para los observadores y para los controladores, además del método de identificación, los cuales están interrelacionados entre sí.

El sistema de puente de grúa es un sistema subactuado, no lineal, con 2 salidas y 1 entrada. En este artículo se estudia técnica identificación por filtro de Kalman y control adaptativo por realimentación de estados.

La estimación de parámetros en línea se hace necesaria puesto que todo sistema mecánico cambia sus propiedades con el pasar del tiempo y el uso. El desgaste de materiales y juntas,

cambios en las propiedades de los materiales por temperatura, fricción, fatiga etc., son algunos factores que pueden alterar los parámetros de un sistema mecánico y hacer que un sistema de control en lazo cerrado pueda no ser capaz de controlar adecuadamente (Wiley y Sons, 2003).

El algoritmo de Kalman es el principal procedimiento para estimar sistemas dinámicos en espacio de estados y la cantidad de aplicaciones en las que puede implementarse es muy amplia (Solera., 2003).

El método de estimación por filtro de Kalman está basado en un conjunto de ecuaciones que brindan una solución recursiva óptima por el método de mínimos cuadrados. Se han desarrollado técnicas de control adaptativo (Moore y Tendrake., 2014) con parámetros desconocidos utilizando reguladores auto-ajustables, siendo un método flexible pero en muchos casos, métodos computacionalmente irrealizables y sin posibilidad de realizar pruebas de estabilidad en el sistema.

Nuevas técnicas que permitan que un sistema mecánico pueda ser controlado y realizable en tiempo real son necesarias para lograr la estabilización y seguimiento de trayectorias de manera simultánea (Smoczek y Szpytko, 2010). Los sistemas de control más utilizados para sistemas mecánicos de puente de grúa son el control difuso, debido a la flexibilidad, poco peso computacional, aprendizaje, validación de datos, posibilidad de combinar algoritmos de regulación y razonamiento lógico (Smoczek y Szpytko, 2010).

Las principales desventajas del control difuso, radican en ser un método experimental donde se debe ajustar manualmente, además diseños intuitivos, la robustez no es una propiedad de los sistemas de control difuso (Albertos y Sala., 1998).

Los sistemas de control adaptativo permiten realizar el ajuste de parámetros de un sistema identificando algún cambio en el sistema mecánico. Además es posible realizar procesos como matrices de desacople o reducción para disminuir el tiempo de procesamiento del sistema de control y estimación de parámetros (Moore y Tendrake, 2014). Por tal motivo, en este artículo se propone diseñar un sistema de control con estimación de parámetros en tiempo real capaz de realizar regulación y seguimiento a un sistema mecánico subactuado con parámetros desconocidos.

## 2. MARCO TEÓRICO.

### 2.1 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un estimador-predicor de estados para sistema dinámicos (Solera., 2003). .  
Sea el modelo de un sistema.

$$x_{k+1} = Fx_k + w_k \quad (1)$$

$$y_k = Fx_k + v_k \quad (2)$$

Donde  $x_k$  son los estados,  $y_k$  es la señal de salida,  $w$  y  $v$  son señales de ruido blanco. Las ecuaciones del filtro de Kalman son (Solera., 2003).

$$P_k^- = FP_{k-1}^- F^T + Q \quad (3)$$

$$k_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (4)$$

$$\hat{x}_k = F\hat{x}_{k-1}^+ \quad (5)$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H\hat{x}_{k-1}^-) \quad (6)$$

$$P_k^- = (I - k_k H) P_k^- \quad (7)$$

Para  $k=1, 2, 3, \dots$  donde  $I$  es la matriz identidad,  $\hat{x}_k^-$  es el estimado anterior de estado  $x_k$ ,  $\hat{x}_k^+$  es el estimado posterior de  $x_k$ ,  $K_k$  es la ganancia del filtro de Kalman,  $P_k^-$  es la covarianza de los estimadores anteriores del error  $x_k - \hat{x}_k^-$  y  $P_k^+$  es la covarianza de los estimadores del error  $x_k - \hat{x}_k^+$  (Simon.D., 2009).

## 3. MATERIALES Y MÉTODOS

### 3.1 Modelo del sistema

El desarrollo y simulaciones del artículo se desarrollaron tomando de referencia el modelo de puente de grúa (*Feedback*) ver figura 1. Dicho sistema se caracteriza por ser no lineal y requiere ser linealizado. Realizando sumatoria de fuerzas y momentos, se obtiene las siguientes ecuaciones.

$$(m + M) \ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{q} \cos q - ml\dot{q}^2 \sin q = F \quad (8)$$

$$(I + ml^2) \ddot{q} - mgl \sin q + ml\dot{x} \cos q - dq = 0 \quad (9)$$

Para la linealización se asume  $q = 0$  para el caso de péndulo invertido, se puede asumir:

$$\sin q \cong q \quad (10)$$

$$\cos q \cong 1 \quad (11)$$

$$q^2 = 0 \quad (12)$$

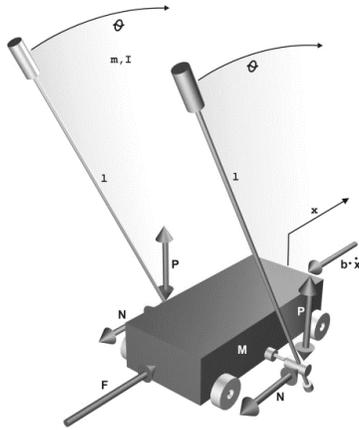


Fig. 1. Diagrama de cuerpo libre.

Remplazando en la ecuación del modelo no lineal tenemos:

$$(m + M) \ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{q} = F \quad (13)$$

$$(I + ml^2) \ddot{q} - mglq + ml\ddot{x} \cos q - d\dot{q} = 0 \quad (14)$$

Se asume  $q = 1$  para el caso de puente de grúa:

$$\sin q \cong -q \quad (15)$$

$$\cos q \cong -1 \quad (16)$$

$$q^2 = 0 \quad (17)$$

Remplazando en la ecuación del modelo no lineal se tiene:

$$(m + M) \ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{q} = F \quad (18)$$

$$(I + ml^2) \ddot{q} + mglq - ml\ddot{x} + d\dot{q} = 0 \quad (19)$$

Luego se reemplazan los valores de dichos parámetros por los brindados por el fabricante del modelo.

Parámetros	Valor
<b>g.</b> Gravedad	9.81 m/s <sup>2</sup>
<b>l.</b> Distancia del poste	0.36 a 0.4 m
<b>M.</b> Masa del carro	2.4 Kg
<b>m.</b> Masa del poste	0.23 Kg
<b>I.</b> Momento de inercia	Aprox 0.099 kg.m <sup>2</sup>
<b>b.</b> Coef fricción del carro	0.05 Ns/m
<b>d.</b> Coef amortiguamiento	0.005 Nms/rad

### 3.2 Identificación del sistema.

Un sistema MIMO con  $p$  salidas,  $q$  entradas y operador de retraso  $r$  puede ser descrito como.

$$A(r^{-1})y(k) = B(r^{-1})u(k) \quad (20)$$

Donde  $A$  y  $B$  están definidos como.

$$A(r^{-1}) = A_0 + A_1(r^{-1}) + \dots + A_n(r^{-1}) \quad (21)$$

$$B(r^{-1}) = B_1(r^{-1}) + B_2(r^{-2}) + \dots + B_m(r^{-m}) \quad (22)$$

Con  $n \geq m$ , siendo  $A$  de dimensiones  $p \times p$  y  $B$  de dimensiones  $p \times q$ . Donde el vector de entradas  $u$  es  $q \times 1$  y el vector de salidas es  $p \times 1$  como se muestra en (23) para  $y(k)$  y (24) para  $u(k)$ .

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_p(k) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_q(k) \end{bmatrix} \quad (24)$$

Si  $A_0$  es una matriz Identidad, el sistema resultante puede escrito como:

$$y(k) = B_1 u(k-1) + \dots + B_m u(k-m) - A_1 y(k-1) - \dots - A_n y(k-n) \quad (25)$$

Donde  $A_i$  se define así.

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \dots & a_{1p}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \dots & a_{2p}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}^i & a_{p2}^i & \dots & a_{pp}^i \end{bmatrix} \quad (26)$$

Y donde  $B_i$  se define así.

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & \dots & b_{1q}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & \dots & b_{2q}^i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}^i & b_{p2}^i & \dots & b_{pq}^i \end{bmatrix} \quad (27)$$

La ecuación de salida puede ser escrita utilizando el modelo DARMA como se muestra.

$$y(k) = \mathbf{q}^T \mathbf{f}(k-1); \quad k \geq 0 \quad (28)$$

Siendo  $y$  la salida en el instante  $k$  y  $\mathbf{q}^T$  la transpuesta de la matriz  $\mathbf{q}$  que contiene los parámetros  $A$  y  $B$  de dimensiones  $(mq+np) \times p$ .

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -a_{11}^1 & -a_{21}^1 & \cdots & -a_{p1}^1 \\ -a_{12}^1 & -a_{22}^1 & \cdots & -a_{p2}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{1p}^1 & -a_{2p}^1 & \cdots & -a_{pp}^1 \\ -a_{11}^2 & -a_{21}^2 & \cdots & -a_{p1}^2 \\ -a_{12}^2 & -a_{22}^2 & \cdots & -a_{p2}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{1p}^2 & -a_{2p}^2 & \cdots & -a_{pp}^2 \\ -a_{11}^n & -a_{21}^n & \cdots & -a_{p1}^n \\ -a_{12}^n & -a_{22}^n & \cdots & -a_{p2}^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{1p}^n & -a_{2p}^n & \cdots & -a_{pp}^n \\ b_{11}^1 & b_{21}^1 & \cdots & b_{p1}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 & \cdots & b_{p2}^1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1q}^1 & b_{2q}^1 & \cdots & b_{pq}^1 \\ b_{11}^2 & b_{21}^2 & \cdots & b_{p1}^2 \\ b_{12}^2 & b_{22}^2 & \cdots & b_{p2}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1q}^2 & b_{2q}^2 & \cdots & b_{pq}^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{11}^m & b_{21}^m & \cdots & b_{p1}^m \\ b_{12}^m & b_{22}^m & \cdots & b_{p2}^m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{1q}^m & b_{2q}^m & \cdots & b_{pq}^m \end{bmatrix} \quad (29)$$

Siendo  $\mathbf{f}(k-1)$  el vector de dimensiones  $(mq+np) \times 1$  que contiene los valores de entradas y salidas pasadas.

$$\mathbf{f}(k-1) = \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ \vdots \\ y_p(k-1) \\ \vdots \\ y_1(k-n) \\ \vdots \\ y_p(k-n) \\ u_1(k-1) \\ \vdots \\ u_q(k-1) \\ \vdots \\ u_1(k-m) \\ \vdots \\ u_q(k-m) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Algoritmo para la estimación de parámetros con el filtro de Kalman.

Se debe inicializar, para el caso estocástico.

$$\hat{\mathbf{q}}(0) = E(\mathbf{q}) \quad (31)$$

$$P(0) = E\left[(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}(0))(\mathbf{q} - \hat{\mathbf{q}}(0))^T\right] \quad (32)$$

Para  $k \in [1, \dots, \infty]$  las ecuaciones de actualización de procesos son.

$$\hat{\mathbf{q}}^-(k) = \hat{\mathbf{q}}(k-1) \quad (33)$$

$$P^-(k) = P(k-1) + R^r(k-1) \quad (34)$$

Y las ecuaciones de actualización de las medidas son.

$$K_q(k) = P^-(k) \mathbf{j}(k) (\mathbf{j}^T(k) P^-(k) \mathbf{j}(k) + R^e)^{-1} \quad (35)$$

Ganancia de Kalman:

$$\hat{\mathbf{q}}(k) = \hat{\mathbf{q}}^-(k) + K_q(k) (y(k) - \hat{\mathbf{q}}^T(k-1) \mathbf{j}(k-1)) \quad (36)$$

La matriz de covarianza está definida por

$$P(k) = (I - K_q(k) \mathbf{j}^T(k)) P^-(k) \quad (37)$$

Con  $R^r$  como covarianza de innovaciones y  $R^e$  covarianza del ruido en la medida (Haykin, 2001).

### 3.3 Control por realimentación de estados.

La representación de espacios aumentado puede ser descrita como:

$$\Phi(k) = F\Phi(k-1) + Gu(k) \quad (38)$$

$$y(k) = C\Phi(k-1) \quad (39)$$

Donde

$$F = \begin{bmatrix} -A_1 & \cdots & -A_n & B_1 & \cdots & B_m \\ I & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (40,41)$$

$$C = [-A_1 \quad \cdots \quad -A_n \quad B_1 \quad \cdots \quad B_m] \quad (41)$$

Donde el controlador en espacio de estados está definido como

$$Kg = (C(I - F + GK)^{-1} G) \quad (42)$$

Donde  $C$ ,  $F$  y  $G$  son las matrices de espacio de estados extendido,  $I$  es la matriz identidad del tamaño de  $G$ ,  $K$  es la matriz de ganancia de

realimentación calculado con asignación de estructuras propias del sistema de espacio de estados extendido y siendo  $A^+$  la pseudo inversa de  $A$ , dado que al ser un sistema subactuado, no tendrá inversa debido a su dimensionalidad.

#### 4. RESULTADOS

Utilizando MATLAB/Simulink se realiza la linealización y simulación del modelo y sistema de control de un puente de grúa, ver figura 2.

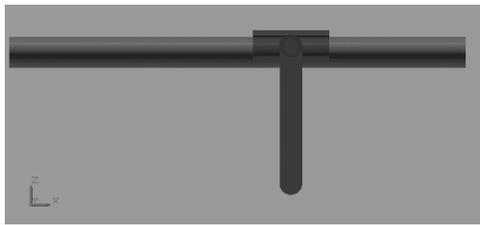


Fig. 2. Simulación del péndulo como puente grúa.

Siendo un sistema de cuarto orden con una entrada y dos salidas, el sistema, puede ser estimado tomando las 2 muestras anteriores de  $k$ :

$$U(k-1), U(k-2), Y(k-1) \text{ y } Y(k-2) \quad (43)$$

Del anterior sistema se obtiene el siguiente modelo

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} -a_{11}^1 & -a_{21}^1 \\ -a_{21}^1 & -a_{22}^1 \\ -a_{11}^2 & -a_{21}^2 \\ -a_{12}^2 & -a_{22}^2 \\ b_{11}^1 & b_{21}^1 \\ b_{12}^1 & b_{22}^1 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Donde:

$$\hat{Y}(k) = \hat{\mathbf{q}}(k-1)^T \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_1(k-2) \\ y_2(k-1) \\ y_2(k-2) \\ u_1(k-1) \\ u_2(k-2) \end{bmatrix} \quad (45)$$

Utilizando el algoritmo de identificación por filtro de Kalman se estiman los parámetros. Realizando una comparación del comportamiento del sistema identificado por Mínimos cuadrados y el mismo sistema de control, se pueden observar que el sistema de identificación por filtro de Kalman, reduce significativamente los sobre picos iniciales como puede verse en la figura 3 y 4.

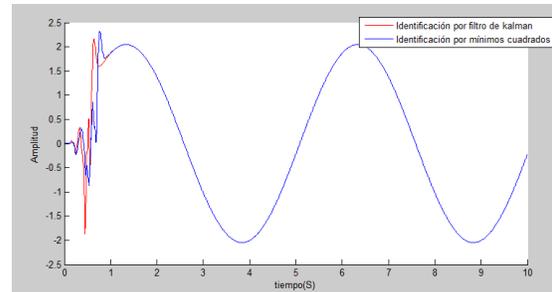


Fig. 3. Posición del carro. Identificado por mínimos cuadrados vs filtro de Kalman.

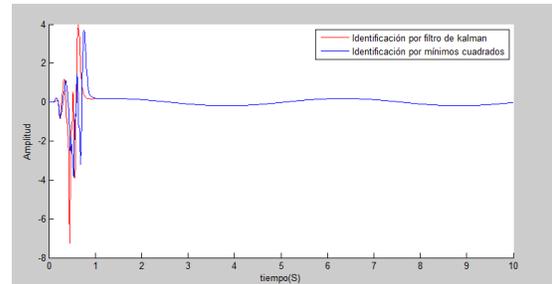


Fig. 4. Ángulo de inclinación. Identificado por mínimos cuadrados vs filtro de Kalman

Tanto por el método de identificación por mínimos cuadrados como filtro de Kalman, es posible llegar a estabilizar parámetros que permitan un correcto funcionamiento del sistema de control, sin embargo, la identificación por Filtro de Kalman, es capaz de estabilizar los parámetros en menos instantes de tiempo.

Después de 1.5 segundos a un tiempo de muestreo de 0.01s (150 muestras). Los parámetros  $\mathbf{q}$  son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1.9907 & -0.0061 \\ -0.0046 & 1.9256 \\ -0.9991 & 0.0064 \\ 0.0047 & -0.9245 \\ -0.0306 & 0.0066 \\ -0.0316 & 0.0119 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Una vez estimado y calculado las matrices  $F$ ,  $G$  y  $C$  del espacio de estados aumentado para cada iteración  $K$ , se realiza el cálculo del controlador por realimentación de estados.

$$K = \text{place}(F, G, [0.2 \ 0.3 \ 0.4 \ 0.5 \ 0.6 \ 0.7]) \quad (47)$$

Estando los polos deseados dentro del círculo unitario para lograr estabilidad.

$$Kg = \left( c(I - F + GK)^{-1} G \right)^T \quad (48)$$

Aplicando una señal Seno a la entrada referencia de la posición del carro, la posición de este sigue fielmente la señal de referencia mientras que el Angulo de posición del poste se mantiene en cero, todo esto después de aproximadamente un segundo cuando se ha identificado el sistema. (Figs. 5 y 6).

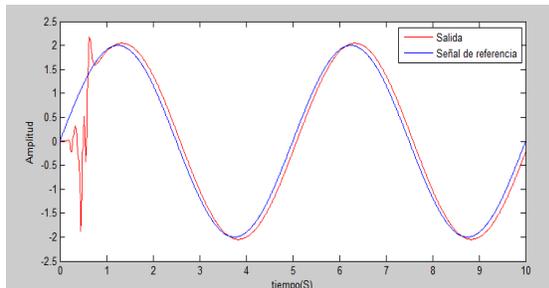


Fig. 5. Señal de referencia y salida de la posición del carro.

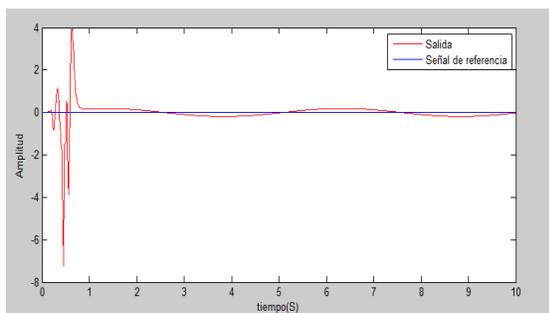


Fig. 6. Señal de referencia y salida del ángulo del poste.

Los parámetros de identificación en línea se estabilizan en aproximadamente 0.5 segundos, ver fig. 7.

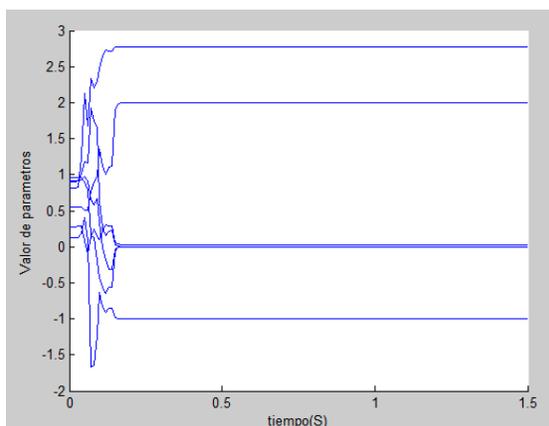


Fig. 7. Parámetros del sistema en el tiempo.

## 5. CONCLUSIONES

El sistema de identificación por mínimos cuadrados y control multivariable por realimentación de estados, fue aplicado a nivel de simulación utilizando *MATLAB Simulink*, el cual demostró ser un sistema de control adecuado para ser aplicado a un puente de grúa, puesto que permite la estimación de los parámetros de forma recursiva en cada iteración y es capaz de adaptarse al cambio de parámetros que puedan surgir debido a condiciones como carga del péndulo, distancia entre la carga y el carro, condiciones físicas, entre otros.

## REFERENCIAS

- Albarracin A, D. y Giraldo, E. Adaptive multivariable control of a wind energy conversion system based on double-fed induction generator.
- Clymer, J. R. (1992). Discrete Event Fuzzy Airport Control. *IEEE Trans. On Systems, Man, and Cybernetics*, Vol. 22, No. 2.
- Feedback, Digital PendulumControl Experiments
- Haykin, S., (2001). *Kalman filtering and neural networks*, John Wiley & Sons, Inc, Toronto.
- Jiang, Z.P., Lefeber, E., Nijmeijer, H. (2001). Saturated stabilization and tracking of a Nonholonomic mobile robot. *Syst. & Control Lett.*
- Moore., J., Tendrake Russ. (2014) Adaptive control design for underactuated systems using sums-of-squares Optimization. *IEEE Trans on American Control Conference*.
- Ogata, K., (2004). *Ingeniería de Control Moderna*, Prentice Hall, Cuarta edición, Madrid.
- Pardo G., A. y Díaz R., J. L., (2004). *Aplicaciones de los convertidores de frecuencia*, Estrategias PWM, Editorial Java E. U., Colombia.
- Simon, D., (2009) Kalman filtering with state constraints: a survey of linear and nonlinear algorithms. *IET journals*.
- Smoczek, J. y Szpytko, J., (2010) Fuzzy logic approach to the Gain Scheduling crane control system. *AGJ University of science and technology*.
- Solera R, A., (2003). El filtro de Kalman. Banco Central de Costa Rica.
- Wiley, J y Sons. (2003). *Adaptive Control Design and Analysis*;