

**CENTROIDS DEFINITION IN HARTMANN PATTERNS USING DIGITAL
IMAGE PROCESSING****DEFINICIÓN DE CENTROIDES EN PATRONES DE HARTMANN MEDIANTE
PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMÁGENES****MSc. Andrés Fernando Jiménez López****Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia**Escuela de Ingeniería Electrónica, Grupo de Investigación en procesamiento de Señales
Sogamoso, Boyacá, Colombia. Tel.: 57-8-7705450, Fax: 57-8-7705450
E-mail: andres.jimenez@uptc.edu.co

Abstract: With an optical system that includes a screen with square array of holes we sample a wavefront when it is illuminated with a collimated beam. The reconstruction of the refracted wavefront is carried out with an algorithm based on the Fourier analysis, which depends of the centroids detection of the spots in the observation screen using digital image processing. The algorithm developed for the definition of the centroides in the Hartmann patterns is explained in this document.

Keywords: Centroid, Hartmann pattern, spot, wavefront.

Resumen: Con un sistema óptico que incluye una pantalla con un arreglo de agujeros se muestrea un frente de onda cuando éste, es iluminado con un haz de luz colimado. La reconstrucción del frente de onda refractado se determina con un algoritmo basado en análisis de Fourier, el cual depende de la detección de centroides de las manchas en la pantalla de observación mediante procesamiento digital de imágenes. El algoritmo desarrollado para la definición de los centroides de los patrones de Hartmann se describe en éste documento.

Palabras clave: Centroide, Patrón de Hartmann, mancha, frente de onda.

1. INTRODUCCIÓN

Existen varios procedimientos para la determinación del frente de onda de un sistema óptico, entre los cuales están las pruebas cuantitativas no rápidas (método interferométrico) y los método cualitativos-rápidos o cuasicuantitativos (la prueba de Foucault, la prueba Wire, la prueba de Ronchi y la prueba de Hartmann). El método Interferométrico es la prueba de mayor potencial para obtener la información cuantitativa del frente de onda con alta precisión, pero presenta problemas de sensibilidad cuando el medio entre el sistema a medir y la CCD es turbulento o cambia rápidamente, además de ser

sensible a las vibraciones rápidas en el sistema. Para corregir las turbulencias se emplean los sistemas aislados, pero éstos aumentan los costos de implementación (Malacara, 1992). La prueba de Hartmann es un método de reconstrucción menos preciso que el interferométrico, pero aceptable para la mayoría de las aplicaciones de metrología óptica, por sus características y los costos reducidos en su implementación.

Johannes Hartmann (1865-1936) fue un astrofísico germano que mientras era profesor en Potsdam a los comienzos del siglo veinte, desarrolló su famosa prueba de pantalla. Hartmann trabajaba en el telescopio *El Gran Refractor*, el cual sería usado

para los trabajos de Potsdam en el campo de la espectroscopía astronómica. Sin embargo la óptica en el telescopio no tenía la calidad adecuada para capturar imágenes fotográficas aceptables (Platt, 2001). Por tanto construyó una pantalla con una serie de hoyos en ella, la colocó sobre la apertura del telescopio y mediante placas fotográficas y la relación de las manchas (spots) grabadas en ellas, Hartmann fue capaz de concluir que el problema del gran refractor residía en el lente primario (Schwiegerling, 2003).

2. LA PRUEBA DE HARTMANN

En la figura 1, se aprecia el esquema general de la prueba de Hartmann para la medición del frente de onda de una lente de prueba. Básicamente está constituido por: una fuente de iluminación, un sistema óptico para colimar la iluminación, una pantalla de Hartmann, la lente de prueba, un plano de observación, un objetivo y una CCD. En esta prueba, un frente de onda se muestrea en una pantalla con agujeros y luego se reconstruye al relacionar entre sí las locaciones de muestreo y una pantalla de observación.

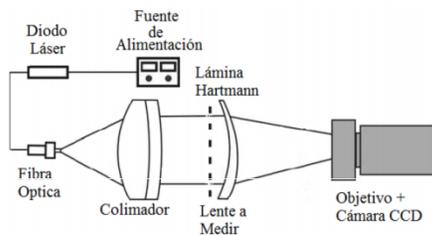


Fig.1. Esquema básico del montaje para la medición del frente de onda de una lente mediante la Prueba de Hartmann.

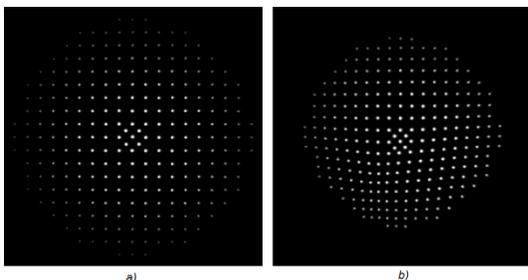


Fig.2. Patrones de Hartmann de a) Referencia y b) Prueba (Con el sistema óptico a estudiar). Para éste caso el sistema óptico usado es una lente oftálmica de adición progresiva.

Se trabaja con un frente de onda de referencia (sin el sistema óptico que se desea medir) y uno de prueba (con el sistema óptico que se desea medir), donde el cambio del frente de onda de prueba respecto al frente de onda de referencia causa que en un plano imagen se obtengan desviaciones de rayo que se evidencian en los patrones de Hartmann o Hartmanngramas como se aprecia en la figura 2. Al conocer estas desviaciones y la ubicación del plano imagen, se puede determinar la inclinación del frente de onda (Malacara, 2007).

2.1. Reconstrucción del Frente de Onda de un sistema óptico

La óptica geométrica basa su estudio de la propagación de la luz en dos conceptos fundamentales: el rayo luminoso para caracterizar a la luz, y el índice de refracción para definir los medios materiales a través de los cuales se realiza dicha propagación. Ambos conceptos se complementan con tres leyes, las cuales rigen la propagación de los rayos en los medios: propagación rectilínea, refracción y reflexión. Estas leyes no son más que consecuencias del principio de Fermat.

Si un rayo de luz recorre un trayecto de longitud s en un medio homogéneo de índice de refracción n , se define el camino óptico L de dicho rayo como el producto del índice de refracción del medio y la longitud recorrida: $L = n \cdot s$. Si en su trayectoria atraviesa diferentes medios de índice de refracción n_i y recorre en cada uno de ellos un trayecto de longitud s_i , el camino óptico total sería:

$$L = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2 + \dots = \sum_i n_i \cdot s_i \quad (1)$$

Si cada uno de los rayos provenientes del objeto se traza de modo que recorran el mismo camino óptico que el recorrido por el rayo principal, el extremo de cada uno de dichos rayos forma una superficie que recibe el nombre de frente de onda del sistema óptico.

Al observar la Figura 3., si tras atravesar el sistema óptico dicha superficie es esférica con su centro de curvatura en la posición de la imagen paraxial del punto objeto, la imagen será perfecta. Así los rayos trazados a través del sistema al propagarse desde el punto objeto P hasta el punto imagen P_o recorren el mismo camino óptico, y todos ellos pasan por P_o . Ahora bien, si el frente de onda se desvía respecto del frente de onda esférico, también denominado esfera de referencia, diremos entonces que la imagen está aberrada.

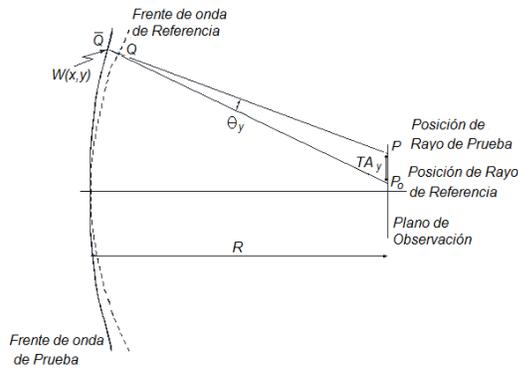


Fig.3. Relación entre las aberraciones de Rayo y las de frente de Onda.

En esta situación, los rayos no recorren el mismo camino óptico, y su intersección con el plano imagen paraxial ya no es el punto P_0 , sino puntos más o menos cercanos a él. La distancia entre dichos puntos y la posición de la imagen paraxial se denomina aberración de rayo. Por otro lado, se define la aberración de onda o deformación del frente de onda, y corresponde a un rayo determinado en el punto Q , donde intercepta a la esfera de referencia, como la diferencia de caminos ópticos recorridos por el rayo considerado y el rayo principal al desplazarse ambos desde el punto objeto hasta la intersección con dicha esfera de referencia (Mahajan, 1998).

2.2. Relación entre aberraciones de rayo y aberraciones de onda

En la Figura 3, se analiza la intersección de un rayo que proviene del sistema de prueba respecto a otro que proviene del sistema de referencia con el plano de observación en la dirección de las y (El mismo análisis se realiza para la dirección de las x).

El rayo del sistema de referencia intercepta al plano de observación en la ubicación P_0 . El rayo que proviene del sistema de prueba (espejo) intercepta al frente de onda de prueba y a la esfera de referencia en las locaciones \bar{Q} y Q , respectivamente e intercepta al plano de observación en la ubicación P .

La aberración de onda se define mediante $W = n_i \bar{Q}Q$ que está relacionada con la aberración transversal de rayo TA_y , mediante las relaciones exactas de Rayces expresadas en la ecuaciones (2) y (3), en las direcciones x y y respectivamente [45].

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial x} = -\frac{TA_x}{R - W} \quad (2)$$

$$\frac{\partial W(x, y)}{\partial y} = -\frac{TA_y}{R - W} \quad (3)$$

Donde $W(x, y)$ es la deformación del frente de onda, TA_x y TA_y son las aberraciones de rayo en las direcciones de x y y respectivamente, R es la separación entre el espejo y el plano de grabación, y q_y es la desviación angular.

El método de Hartmann, requiere el uso de algoritmos precisos para la medición de los centroides de los spots en la pantalla de observación para poder determinar las pendientes del frente de onda local de forma precisa y posteriormente reconstruir el frente de onda al realizar algún tipo de integración sobre las mediciones de los gradientes por los métodos de: Integración Trapezoidal, algoritmo de Integración de Southwell, Regresión Polinomial del frente de Onda o el Método de Fourier, entre otros (Malacara, 2007), (Southwell, 1980).

3. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE UN PATRÓN DE HARTMANN

La precisión de la prueba de Hartmann para medir la distorsión del frente de onda depende esencialmente de la medición precisa de los centroides de cada spot (Yin *et al.*, 2009; Chen *et al.*, 2009; Li *et al.*, 2008; Baik *et al.*, 2007; Arulmozhivarman *et al.*, 2006; Olarte, 2006) y el algoritmo de reconstrucción (Liang *et al.*, 2009). Si el proceso utilizado es preciso se pueden clasificar correctamente el fondo y los spots, en cuyo caso el centroide estimado será muy concordante con el real. Sin embargo, si existe un valor grande de ruido del sensor y si los niveles de gris son similares entre el fondo y los spots, el procedimiento de extracción de información debe mejorarse para obtener resultados exitosos (Van *et al.*, 1988). De acuerdo a (Liang *et al.*, 2009), se deben tener en cuenta los siguientes aspectos al determinar los centroides:

- La intensidad de la luz de un spot simple es similar a una distribución Gaussiana.
- La intensidad de los spots no es uniforme en locaciones diferentes.
- El ruido tiene una distribución aleatoria.

3.1. Métodos para la determinación de Centroides

Los patrones de las imágenes se obtienen en el plano de observación y son registrados usualmente mediante un sensor CCD, esto quiere decir que cada spot (mancha o patrón de imagen de un rayo luminoso) está espacialmente muestreado en ambas direcciones debido a la localización discreta de los píxeles en la CCD.

Cada spot es una distribución discreta de gris muestreada en una región de $n \times m$ y su ubicación está definida por la suma discreta del centro de masa (Olarate, 2006). El algoritmo de promediado estadístico (por ejemplo el centro de masa) es el más utilizado de acuerdo a la definición de Centroide; sin embargo este método es sensitivo a la influencia del ruido, particularmente en el caso en que el área del spot es relativamente pequeña comparada con el área de detección. Para resolver los problemas en los errores de determinación de los centroides se han desarrollado varios procedimientos, entre los que se encuentran el método de Umbralización y de Ventaneo (Park *et al.*, 2002; Li *et al.*, 2008; Olarte, 2006).

3.1.1. Método de Umbralización y Ventaneo

El proceso de umbralización es excepcional en la tarea de reducción de datos en las pruebas de Hartmann y Shack Hartmann. Esta clase de procesamiento de imágenes se usa con el objetivo de descartar el fondo y los píxeles ruidosos de los objetos que pueden disminuir la exactitud y la precisión del procedimiento para la detección de los centroides (Arines *et al.*, 2004; Liang *et al.*, 2009).

En el algoritmo de umbralización, un valor de umbral se utiliza para mejorar la razón de Señal-Ruido y la intensidad discreta de la imagen original se transforma mediante:

$$I_{U_i} = \begin{cases} I_i, & I_i \geq U_i \\ 0, & I_i < U_i \end{cases} \quad (4)$$

Donde U_i es el umbral asociado al nivel de intensidad I_i . En el caso de que la intensidad de la imagen no sea uniforme, es difícil encontrar un valor de intensidad simple con el cual se pueda segmentar correctamente cualquier spot de la imagen, por lo cual el procedimiento de filtrado necesita un criterio para la selección de este umbral (por ejemplo el análisis del histograma de la

imagen) (Yin *et al.*, 2009; Baik *et al.*, 2007). El valor del umbral debe ser mayor que $3N_r + N_b$, donde N_r y N_b son: el ruido de lectura-salida y el ruido de fondo respectivamente. El camino más simple para asignar el valor para U_i es hacer a $U_i = U$, donde U es un valor constante para la imagen. La desventaja de este método, sin embargo es que la preservación de las características de la imagen depende del valor que se seleccione como U , lo cual significa que cierta información importante podría extraerse de la imagen, lo que afectaría el cálculo de los centroides. En el algoritmo de ventaneo, el tamaño de la ventana de detección se cambia para reducir la influencia del ruido.

3.1.2. Método de Peso Promediado de Píxeles

El método convencional del algoritmo para la detección de centroides se basa en el cálculo del centro de masa (Baik *et al.*, 2007), y es conocido como el algoritmo de peso promediado de píxeles (PPP) y a partir de éste método se han desarrollado los métodos de: PPP de umbral (PPPU), en el cual se utiliza el umbral para mejorar la razón de señal a ruido (SNR) y el método PPP de potencias (PPPP), en el cual el valor de la razón de señal a ruido se mejora mediante el uso de potencias (Jiang *et al.*, 2006). Además, se han utilizado métodos adaptativos de detección de centroides mediante un método de filtrado morfológico sobre la imagen binaria (Olarate, 2006).

En el peso promediado de Píxeles (PPP) para un arreglo de fotodetectores ideal, la posición del centroide del spot de una imagen (Chen *et al.*, 2009) es:

$$\bar{x}_c = \frac{\sum_{i,j}^{L,M} x_i I_{i,j}}{\sum_{i,j}^{L,M} I_{i,j}} \quad (5)$$

$$\bar{y}_c = \frac{\sum_{i,j}^{L,M} y_i I_{i,j}}{\sum_{i,j}^{L,M} I_{i,j}} \quad (6)$$

Donde \bar{x}_c y \bar{y}_c son las coordenadas del centroide del spot, x_i y y_i son las coordenadas de cada píxel, $I_{i,j}$ es la señal de lectura de salida del píxel (x_i, y_i) (eventos de los fotones en el píxel (i, j)) y L, M son el número de píxeles en las direcciones x y y respectivamente, dentro de la ventana de detección (Li *et al.*, 2008). Después de que los spots en la

imagen se han detectado, el área de detección de cada centroide del spot se identifica mediante el centro del spot y se define como una ventana rectangular centrada en el spot de la imagen y el tamaño de la ventana puede definirse manualmente de acuerdo al área del spot en estudio (Yin et al, 2009).

4. PROCEDIMIENTO PROPUESTO PARA LA DETERMINACIÓN DE LOS CENTROIDES

El método propuesto para la determinación de los centroides de los patrones de Hartmann adquiridos, se fundamenta en procedimientos morfológicos de procesamiento de imágenes. Primero se definen los cambios de niveles de intensidad de los píxeles en toda la imagen, determinando los bordes de cada región correspondiente a cada mancha (spot). Posteriormente se realizan procedimientos morfológicos de dilatación y rellenado de las locaciones encontradas, para finalmente aplicar un algoritmo de pesos promediados de píxeles para la determinación de los centroides.

4.1. Segmentación de la Imagen

El primer procedimiento que se realiza consiste en la segmentación de la imagen, el cual la subdivide en sus partes constituyentes u objetos (Jain, 1989). Los algoritmos de segmentación de imágenes monocromáticas generalmente se basan en una de las dos propiedades básicas de los valores del nivel de gris: discontinuidad y similaridad (González *et al.*, 1996). En la primera categoría, el método consiste en dividir una imagen basándose en los cambios bruscos de nivel de gris y se utiliza especialmente en la detección de puntos aislados, la detección de líneas y bordes de una imagen. Dentro de la segunda categoría se encuentran los procedimientos de: umbralización, crecimiento de región, división y fusión de regiones. En detección de centroides se utilizan generalmente procedimientos de similaridad, especialmente umbralización. El procedimiento que se propone está fundamentado en las propiedades de discontinuidades de la imagen.

Un borde es la frontera entre dos regiones con propiedades de gris distintas y debe existir homogeneidad en las regiones para que la transición entre dos de ellas se pueda determinar únicamente con el estudio de discontinuidades en el nivel de gris. El resultado de realizar un procedimiento de detección de bordes sobre una

imagen es otra imagen en blanco y negro del mismo tamaño de la imagen original, con valores de 1 donde la función encuentre bordes y de 0 en los otros casos (Yaniv, 1999).

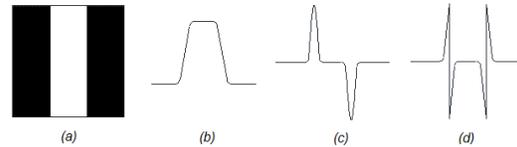


Fig. 4.: Determinación de bordes en una imagen usando propiedades de derivación. (a) Porción de imagen, (b) Perfil, (c) Primera Derivada, (d) Segunda Derivada.

En la figura 4 se aprecia la porción de una imagen que presenta un cambio oscuro-claro-oscuro, el perfil, y la primera y segunda derivadas. Se observa en el perfil, que existe un cambio suave de nivel de gris en los bordes (transición de oscuro a claro o de claro a oscuro), lo que refleja el emborronamiento en los bordes a causa del muestreo (Hobbs, 2000). La primera derivada del perfil de nivel de gris es positiva en el borde de entrada de la transición, negativa en el borde de salida, cero en las zonas donde el nivel de gris es constante y se obtiene en imágenes mediante la operación del gradiente. La segunda derivada es positiva en la parte de la transición asociada con el lado oscuro del borde, negativa en la parte de la transición asociada con el lado claro, cero en las zonas de nivel constante, con un paso por cero en el punto medio de la transición de nivel de gris y se obtiene en imágenes usando el Laplaciano. Por tanto, el módulo de la primera derivada se puede utilizar para detectar la presencia de un borde en una imagen, y el signo de la derivada segunda se puede utilizar para determinar si un píxel del borde está situado en el lado oscuro o claro del mismo.

El gradiente es el método más común de diferenciación en aplicaciones de detección de bordes en una imagen. Debido a que una imagen es una función bivalente $I(x, y)$, se deben determinar las derivadas parciales en las direcciones x y y usando una aproximación discreta de la ecuación 7.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (7)$$

Para el método propuesto se usa el operador gradiente Canny, que se conoce como el detector de bordes óptimo. Este procedimiento inicia con la Convolución de la imagen con las derivadas de una máscara Gaussiana (Suavizado de la imagen para reducir el ruido). Se aplica el operador Sobel

(Ecuación 8), con lo que el resultado es una imagen de magnitud con máximos para las locaciones de los bordes.

$$\nabla f \approx \left| (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3) \right| + \left| (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7) \right| \quad (8)$$

Para cada píxel revisa si es un máximo local en la dirección del gradiente, si es así lo retiene, si no, cambia su magnitud a cero, y la magnitud a lo largo de la dirección del gradiente se halla mediante una interpolación lineal. El paso final del algoritmo es un esquema de doble umbralización; un umbral grande t_1 se selecciona de tal forma que todos los píxeles con magnitud de gradiente mucho más grande que t_1 son clasificados como elementos de borde. Se selecciona un segundo umbral menor $t_2 < t_1$ y todos los píxeles con magnitud de gradiente más grande que t_2 se consideran como candidatos para bordes. Se reclasifican por un método denominado histéresis de tal forma que si un candidato es vecino a la dirección perpendicular al gradiente de un borde, se reclasifica como un borde (Yaniv, 1999).

4.2. Dilatación de bordes de centroides detectados mediante segmentación.

La dilatación es un procedimiento morfológico que añade píxeles a la imagen siguiendo una región de interés (borde de un centroide detectado mediante operaciones de Gradiente), cambia el valor de un píxel del fondo de la imagen a 1 si al ubicarse encima de éste hace parte de la región de interés y añade también píxeles sobre la periferia según el elemento estructurante, incrementando las dimensiones de la región (Acar *et al.*, 2009).

Matemáticamente la dilatación se define como $A \oplus B = \{z | (\hat{B}) \cap A \neq \emptyset\}$. Esta ecuación se basa en obtener la reflexión de B alrededor de su origen, denotada \hat{B} y definida como $\hat{B} = \{w | w = -b, \text{ para } b \in B\}$ y trasladar esta reflexión por z , denotada como \hat{B}_z , y definida por $\hat{B}_z = \{c | c = w + z, w \in \hat{B}\}$ donde B es el elemento estructurante, y la dilatación estaría formada por todos los z , tal que A y \hat{B}_z (reflejado _desplazado), al menos se superpongan en un punto (Dhandra *et al.*, 2006). Se realiza el procedimiento de dilatación de los bordes detectados mediante la segmentación de la imagen empleando la estructura morfológica del disco.

4.3. Llenado de regiones y determinación de Centroides

Un agujero se define como una región de niveles de cero, rodeada por un borde conectado de unos. El objetivo de este procedimiento es el ubicarse dentro de la región dilatada y llenarla con niveles de 1. Los elementos que no son del borde tienen un valor de 0 y los que pertenecen al borde tienen un valor de 1. El procedimiento se explica según la figura 5, iniciando por la generación de un arreglo X_0 de ceros (del mismo tamaño del contenido del arreglo a procesar A) y donde la locación en X_0 corresponde a cada punto correspondiente al hoyo, el cual sería colocado en 1. Luego el siguiente procedimiento es llenar las locaciones dentro del hoyo con 1, mediante la expresión $X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cup A^c$, $k = 1, 2, 3, \dots$, donde B es el elemento estructural (Figura 6c). El algoritmo termina para el paso k , si $X_k = X_{k-1}$ y la unión de X_k y A contiene todos los hoyos y sus bordes, como se muestra en la Figura 6f.

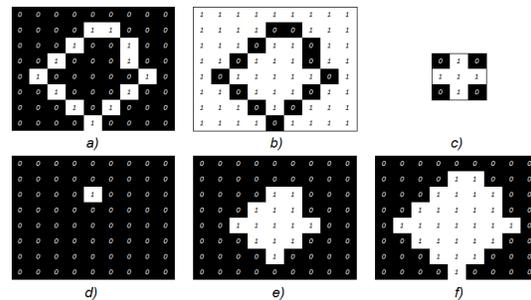


Fig. 5: Procedimiento para el llenado de regiones. a) Imagen a rellenar A b) Arreglo A^c , b) Elemento Estructural B, d) Relleno en el paso 1, X_0 e) Relleno en el paso final X_k , f) Unión de X_k y A .

Después de la cual se realiza el procedimiento de determinación de centroides mediante el peso promediado de Píxeles (PPP).

5. RESULTADOS

Los centroides que se hallan por el método expuesto anteriormente se ordenan y se grafican como se aprecia en la figura 6, para los patrones de Hartmann adquiridos (ver figura 2).

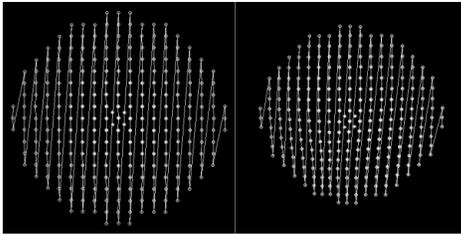


Fig. 6: Centroides correspondientes a patrones de Hartmann de Estudio.

Para determinar los errores del algoritmo desarrollado para la detección de centroides, se realizó un estudio de repetibilidad en los resultados que se obtienen mediante varios tipos de segmentación y de dilatación. Se adquirieron 100 imágenes del comportamiento de la prueba de Hartmann para un sistema óptico, se procesaron, se determinó el centroide del mismo spot para todas las imágenes y se halló el error aleatorio de las medidas. Estos algoritmos se comparan con el procedimiento usado por Mejía (Mejía, 2006), obteniéndose los datos de la Tabla 1, en la cual solo se muestran los resultados correspondientes al algoritmo Canny con diferentes elementos estructurantes para el procedimiento de dilatación. Según éstos resultados el algoritmo Canny junto con la dilatación empleando estructura de disco resulta el más efectivo en cuanto a repetitividad en los resultados por lo cual se considera apto para aplicar en la detección de centroides de spots en el Test de Hartmann.

CONCLUSIONES

En el trabajo desarrollado se establece un procedimiento para la detección de centroides de spots en patrones de Hartmann fundamentado en las propiedades de discontinuidades de la imagen, el cual presenta resultados acertados en la determinación de aberraciones transversales de rayo y por ende permiten realizar procedimientos de reconstrucción del frente de onda de sistemas ópticos.

Las coordenadas de los centroides (x,y) se determinan en dimensiones de subpixel mediante el procedimiento desarrollado, lo que permite procesar información con mayor precisión, pero gracias a la naturaleza discreta de los píxeles de la imagen se establecen coordenadas aproximadas en el procedimiento de visualización. Por lo cual en los procedimientos de cálculo de aberraciones de rayo se deben emplear los valores obtenidos sin aproximación a enteros para obtener resultados más acertados.

REFERENCIAS

- Malacara D., Optical Shop Testing, Second edition, John Wiley Sons, New York, pp. 367-396, 1992.
- Platt B., Shack R. History and Principles of Shack-Hartmann Wavefront Sensing, Journal of Refractive Surgery, Volume 17, 2001.
- Schwiegerling J. Historical Development of the Shack-Hartmann Wavefront Sensor, Department of Ophthalmology, University of Arizona, Tucson, Arizona, 2003.
- Malacara D., Optical Shop Testing, Third Edition, John Wiley Sons, New York, pp. 361-394, 2007.
- Mahajan V., Optical Imaging and Aberrations. Part I, Ray Geometrical Optics, SPIE Optical Engineering Press, ch 3. pp 141-147, 1998.
- Southwell W. H., Wavefront estimation from wavefront slope measurements. J.Opt.Soc. Am. Vol. 70, No 8, pp 998-1006, 1980.
- Yin X., Li X., Zhao L. and Fang Z., Automatic Centroid Detection for Shack-Hartmann Wavefront Sensor, IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Singapore, July 14-17, 2009.
- Chen H. and Rao C., Accuracy analysis on centroid estimation algorithm limited by photon noise for point object, Optics Communications, vol. 282, 2009, pp. 1526-1530.
- Li H., Song H., Rao Ch. and Rao X. Accuracy analysis of centroid calculated by a modified center detection algorithm for Shack Hartmann wavefront sensor, Optics Communications, vol. 281, 2008, pp. 750-755.
- Baik S., Park S., Kim C., and Cha B., A center detection algorithm for Shack Hartmann wavefront sensor Optics Laser Technology, vol. 39, 2007, pp. 262-267.
- Arulmozhivarman P., Praveen L., Ganesan A. Measurement of moments for centroid estimation in Shack Hartmann wavefront sensor a wavelet-based approach and comparison with other methods, Optik, vol. 117, 2006, pp. 82-87.
- Olarte O. and Mejía Y. A morphological based method to calculate the centroid spots of Hartmann patterns, Optics Communications, vol. 260, 2006, pp. 87-90.
- Liang C., Liao W., Shen J., and Niu S., Measurement of Human Eye Aberration, IEEE, Electrical Engineering, 2009, pp. 3-7.
- Van D., Jones R., Noise Effects On Centroid Tracker Aim Point Estimation. IEEE

- Transactions On Aerospace And Electronic Systems, vol. 24, 1988, pp. 177-185.
- Park S. K., Baik S. H., A study on a fast measuring technique of wavefront using a Shack-Hartmann sensor, *Optics Laser Technology*, 34, pp. 684- 687, 2002.
- Arines J., and Ares J., Significance of thresholding processing in centroid based gradient wavefront sensors: effective modulation of the wavefront derivative, *Optics Communications*, vol. 237, pp. 257-266, 2004.
- Jiang Z., Gong S., and Dai Y., Numerical study of centroid detection accuracy for Shack-Hartmann wavefront sensor *Optics Laser Technology*, vol. 38, 2006, pp. 614-619.
- Jain A. *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice-Hall International. 1989. ISBN:0-13-332578-4. pp. 447-570.
- González R. y Woods R. *Tratamiento Digital de Imágenes*. Addison- Wesley. 1996. ISBN:0-201-62576-8. pp. 447-570.
- Yaniv Z. *Edge Detection*. School of Engineering and Computer Science. The Hebrew University, Jerusalem, Israel. 1999. pp. 1-14.
- Hobbs P. *Building Electro-Optical Systems*. John Wiley Sons, pp 58-60, 2000.
- Dhandra B., Malemath V., Mallikarjun H. and Hegadi R. *Skew Detection in Binary Image Documents Based on Image Dilation and Region labeling Approach*. The 18th International Conference on Pattern Recognition. IEEE Computer Society. 0-7695-2521-0/06. 2006.
- Mejía Y. *Hartmann test of small F/# convex mirrors*. *Optics Communications* 263. 2006. pp. 1724.