

**TOOLS EJS 3D / MATLAB FOR THE CONTROL OF THE APPLIED NON
LINEAL SYSTEM TO THE INVERTED PENDULUM ON CAR SLIDE****HERRAMIENTAS EJS 3D/ MATLAB PARA EL CONTROL DEL SISTEMA NO
LINEAL APLICADO AL PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO
DESLIZANTE**

**MSc. Oscar Oswaldo Rodríguez*, Ing. Ronald Fernando Pineda Pinto*
PhD (c). Pedro Fabián Cárdenas****

***Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, **Universidad Nacional**
Escuela de Ingeniería Electrónica, Sogamoso, Boyacá, Tel.: (578) 7705450, Ext. 140.
E-mail: oscar.rodriguez@uptc.edu.co, roferpineda@yahoo.com, pfcardenash@unal.edu.co

Abstract: In this paper is showed a didactic tool for the automatic control teaching based on the inverted pendulum on sliding car, which is developed in a virtual prototype, simulating the nonlinear model in Matlab and presented the result in the java 3D environment. To give solution to the control problem it is necessary to have in consideration two principal and important aspects as “the swing up” (to take the pendulum to vertical position) and the swinging (to maintain the pendulum in the vertical position). The graph user interface (GUI) searches to facilitate the learning of the basic concepts of a control system for ungraduate and posgraduate students, searching to minimize costs and time in the teaching.

Keywords: EJS, java, space of states, stability, Matlab, control, nonlinear.

Resumen: En este artículo se presenta una herramienta didáctica para la enseñanza del control automático basado en el péndulo invertido sobre carro deslizante, el cual se desarrolla sobre un prototipo virtual, simulando el modelo no lineal en matlab y presentado en un entorno java de 3D. Para dar solución al problema del control, se tienen en cuenta dos aspectos principales como los son el “swing up” (llevar el péndulo a posición vertical) y el balanceo (mantener el péndulo en la posición vertical). La interfaz al usuario (GUI) busca facilitar el aprendizaje de los conceptos básicos de un sistema de control para estudiantes de pregrado y posgrado, buscando minimizar costos y tiempo en la enseñanza.

Palabras clave: EJS, java, espacio de estados, controlabilidad, Matlab, control, no lineal.

1. INTRODUCCIÓN

Las plataformas virtuales son aplicaciones Web dedicadas a la enseñanza. Su objetivo se basa en la interacción que tiene el usuario con el software de tal manera que el resultado final de ésta sea el aprendizaje. Existen varias plataformas virtuales y con variados enfoques formativos como lo son el aprendizaje del idioma inglés, las ciencias naturales, las matemáticas, entre otras.

Algunas de las aplicaciones existentes presentan desarrollos teóricos, imágenes, evaluaciones, experimentos y una muy importante, los simuladores como se evidencia en el trabajo desarrollado por (Delgado, 2009) (Aranda *et al.*, 2003)

Actualmente en las instituciones de educación superior del mundo, la enseñanza gira alrededor de los simuladores (plataformas virtuales), con el fin de proporcionar en el estudiante una experiencia en el manejo y control de sistemas y procesos sin la necesidad de su construcción física. Los estudios realizados presentan generalmente modelamientos que describen el comportamiento físico de estos sistemas reales, por medio de ecuaciones matemáticas, dichas ecuaciones son solucionadas por software y los resultados de estas ecuaciones son visualizados en pantalla, de tal manera que se pueda obtener un resultado muy aproximado al real, y así el usuario tenga la experiencia de trabajar y aprender en plataforma.

Los simuladores son atributos de importancia en las plataformas virtuales, se pueden ver como herramientas encargadas de reproducir sensaciones que realmente no están existiendo y sin embargo abarcan la capacidad cerebral como si el evento ocurriera en realidad, lo cual lleva consigo características particulares que tienen muchas aplicaciones, como por ejemplo en pilotos de avión, ellos tienen vuelos simulados donde variables importantes como el clima, varían acorde a situaciones que en un futuro probable pueden vivir, como es de esperar, esta formación le entrega al usuario una gran ventaja en cuanto a la realidad, no arriesgan la vida, no gastan el dinero de un vuelo normal, y el tiempo de enseñanza se optimiza.

El desarrollo de este trabajo que como fin muestra la creación de un simulador para el área de control que tiene dos bases, la visualización del prototipo y los cálculos pertinentes. La visualización se desarrolla en una aplicación java de tipo estudiantil conocida como EJS (*Easy Java Simulations*) (Esquembre y Sanchez.2005) la cual cuenta con herramientas de diseño 2D y 3D, permite de forma sencilla la creación de *applets* que son archivos para la red, y cuenta con conexión a Matlab. Los cálculos se realizan por medio de Matlab (laboratorio de matrices).

El problema de control no lineal trabajado con EJS y Matlab corresponde al péndulo invertido sobre carro deslizante, este modelo tiene sus orígenes en el balanceo necesario para misiles militares así como en los cohetes espaciales (Sultan). Un diseño real de este péndulo tiene varios componentes que varían entre un diseñador y otro, como por ejemplo, la transferencia de movimiento que se puede dar por una correa, cadena o inclusive poleas; pero todos ellos poseen algunos

elementales entre los que se encuentran un motor para generar el movimiento, un carro donde se sustentara el péndulo, uno o dos rieles donde se moverá el carro y por supuesto un péndulo. El péndulo guía o base en este artículo (Cely H. *et al.*, 2011) contiene todos los elementos antes mencionados.

El modelado matemático del péndulo se compone de tres trabajos ya desarrollados (Sultan, Lam, Caipa y Rodríguez. 2009) y basa sus cálculos en ecuaciones físicas para el movimiento rotacional así como las leyes de Newton. En el primer caso, se obtienen dos ecuaciones diferenciales de segundo orden que están en términos de la masa del carro, la masa del péndulo, la posición y la fuerza aplicada al carro, para este caso se trabaja con variables físicamente medibles y que más adelante se puedan comparar con datos reales, se usa una transformación de la fuerza en voltaje aplicado al motor.

El problema de control para este modelo no lineal se compone de dos fases el *swing up* (Bradshaw y Shao, 1996) y el balanceo. El objetivo del *swing up* es el de llevar el péndulo de la posición vertical abajo a la posición vertical arriba, como referencia la posición vertical abajo sería las 6.30 Horas y la posición vertical arriba 12 horas en un reloj convencional.

El balanceo es el control necesario para mantener el péndulo en la vecindad cercana a la posición vertical arriba, y es de considerar que este control es del tipo lineal, mientras el anterior es no lineal, por lo cual se hace necesario linealizar este sistema entorno al punto de equilibrio inestable.

La solución de las ecuaciones y algunas simulaciones se desarrollan en el software de Matlab, el cual cuenta con la herramienta llamada S-Function y que además permite la conexión con otros programas como en este caso java (Específicamente EJS).

2. MODELADO MATEMÁTICO DEL PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO DESLIZANTE

2.1 Descripción

El modelo matemático correspondiente hace referencia a la gráfica de la figura 1 (Fuente: SultanKhalil)

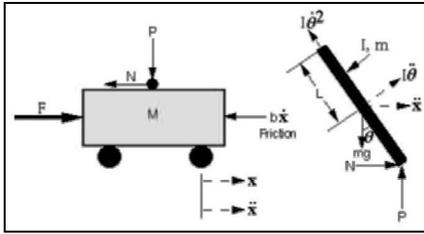


Fig. 1. Descripción física péndulo invertido sobre carro deslizante

De la figura 1 se observa que el sistema se compone de dos elementos principales que son el carro y el péndulo además de la fricción que se da en la unión de estos. La forma en que funciona el péndulo es la siguiente: independiente de las condiciones iniciales donde se encuentre el péndulo, el carro comenzara a moverse sobre su riel (control no lineal) gracias a la acción del motor, este movimiento es horizontal, debido a la acción anterior parte de la energía se transfiere al péndulo el cual empezara movimiento en forma de circunferencia, el movimiento seguirá hasta que entre en la vecindad cercana al punto de equilibrio inestable (posición vertical arriba), en este punto entra en juego la acción de control de balanceo.

2.2 Modelo Matemático

En base a las ecuaciones de movimiento rotacional, las leyes de Newton (Serway R. y Faughn J. 2005) y teniendo en cuenta las fricciones significativas llega a las dos ecuaciones que describen la naturaleza Físico-Matemática del péndulo.

Estas ecuaciones están en términos de la fuerza aplicada al carro, por lo cual se procede a la transformación de la fuerza en el voltaje aplicado al motor.

$$F = (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\dot{q} \cos q - mlq^2 \sin q \quad (1)$$

$$-ml\ddot{x} \cos q - b_2\dot{x} = (l + ml^2)\ddot{q} + mgl \sin q \quad (2)$$

$$F = \left(\frac{K_m K_g}{R_r} V \right) - \left(\frac{K_m K_g}{R_r^2} \dot{x} \right) \quad (3)$$

Donde F es fuerza aplicada al carro debido a la acción del motor, M Masa del carro, m Masa del péndulo, x Posición horizontal del carro, q Angulo del péndulo, b Fricción del carro, l Longitud media del péndulo, b_2 Fricción entre el carro y el péndulo, K_m Constante de torque del motor, K_g Radio de la caja de engranajes, R_r Resistencia de armadura del motor, r Radio del piñon, V Voltaje aplicado al motor

3. OBTENCIÓN MODELO LINEAL Y CONTROLABILIDAD

3.1 Modelo Lineal

El control en la vecindad del punto de equilibrio inestable es de carácter lineal, es necesario llevar el modelo descrito por las ecuaciones (1) y (2) a un modelo lineal representado en espacio de estados. Para aplicar las técnicas de control y usar Matlab, se lleva también el modelo lineal a su representación en espacio de estados que es de la forma de la ecuación (4)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (4)$$

Considerando el aporte suministrado en los trabajos de (Boris y Paul 2000), (Doyle y Francis 1990) junto con los datos del péndulo guía (Cely H. *et al.*, 2011) que se observa en la figura 2, se usa Matlab para obtener el modelo lineal en espacio de estados el cual tiene los siguientes resultados:

Matriz A:

$$a_{11} = 0 \quad a_{12} = 0 \quad a_{13} = 1 \quad a_{14} = 0$$

$$a_{21} = 0 \quad a_{22} = 0 \quad a_{23} = 0 \quad a_{24} = 1$$

$$a_{31} = 0 \quad a_{32} = \frac{-3gm}{l(4M+m)} \quad a_{33} = \frac{-4e}{4m+m} \quad a_{34} = 0$$

$$a_{41} = 0 \quad a_{42} = \frac{-3g}{4l^2} - \frac{9gm}{4l^2(4M+m)} \quad a_{43} = \frac{-3e}{l(4M+m)} \quad a_{44} = 0$$

Matriz B:

$$b_1 = 0 \quad b_2 = 0 \quad b_3 = \frac{K_m K_g}{R_r \left(M + m - \frac{m^2 l^2}{l + ml^2} \right)} \quad b_4 = \frac{ml K_m K_g}{(l + ml^2) R_r \left(M + m - \frac{m^2 l^2}{l + ml^2} \right)}$$



Fig. 2. Péndulo Real base para los datos físicos.
Fuente (Cely H. *et al.*, 2011).

3.2 Controlabilidad y Observabilidad

Para determinar el criterio de controlabilidad y observabilidad (Doyle y Francis 1990) se acude a la

ayuda de Matlab, donde se construyen las matrices de controlabilidad y observabilidad según criterios en el punto de operación, determinando que el rango de la matriz de controlabilidad es 4, de igual forma con la matriz de observabilidad garantizando que el sistema es controlable y observable.

4. DISEÑO CONTROLADORES

El primer objetivo es llevar el péndulo dentro de la vecindad al punto vertical arriba para lo cual se puede usar la técnica de modos deslizantes (Caipa J y Rodríguez J. 2009). Por otro lado, cuando el péndulo se encuentra en la vecindad deseada entra en juego las técnicas de control lineal, objetivo de este trabajo, para el caso particular se ha escogido la realimentación por variables de estado (Boris y Paul 2000). (Doyle y Francis 1990).

4.1 Realimentación por Variables de Estado

Esta técnica de control es una de las más usadas debido a sus particulares características, ella permite ubicar los polos del sistema en lazo cerrado en un lugar escogido por el diseñador (que por supuesto no hará al sistema inestable), dando como resultado un vector de ganancias para cada una de las variables de estado.

Con la ayuda de Matlab y los trabajos realizados en este campo se llega al vector de ganancias correspondiente, para el péndulo guía:

$$V_{\text{ganancias}} = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$$

El vector de ganancias se puede variar desde la interfaz gráfica de usuario, permitiendo aclarar los conceptos adquiridos en un sistema de control, verificando previamente que ocurre en el sistema si alguna de las ganancias toma valores grandes o pequeños.

5. SIMULACIÓN DEL PÉNDULO INVERTIDO SOBRE CARRO DESLIZANTE

Una de las formas de corroborar que el modelo matemático usado es el apropiado, se basa en simulaciones con Matlab gracias a la ayuda de la S-function, la cual puede verse como una plantilla que suministra Matlab para hacer trabajo sobre modelos no lineales. En la figura 3 se presenta el esquema de la simulación (Fuente: autores), las variables de salida para posición del péndulo y del carro en las figura 4 y 5 (Fuente: autores) donde pretende verse que luego de darle al péndulo

movimiento, iniciando en una posición diferente al equilibrio, el péndulo con el tiempo se detenga.

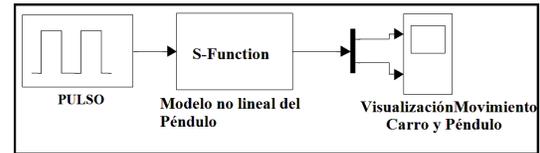


Fig. 3. Esquema para simular el modelo matemático del péndulo en base a la S-function

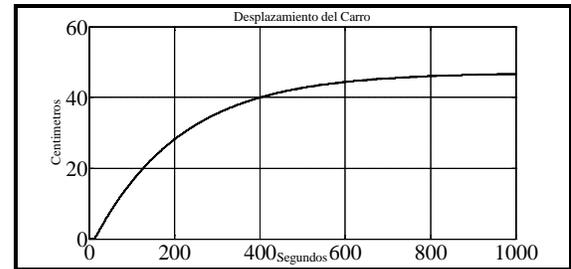


Fig. 4. Movimiento del carro ante una condición inicial diferente de cero.

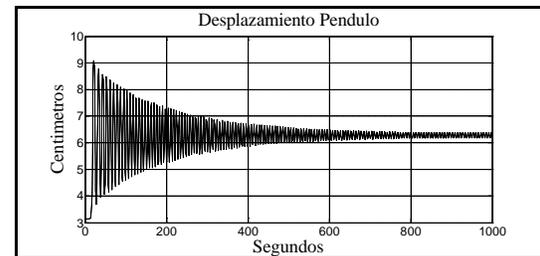


Fig. 5. Movimiento del péndulo ante una condición inicial diferente de cero

En la figura 5 se observa que el péndulo tiene un movimiento oscilatorio con amplitud descendiente hasta llegar a cero, lo cual corrobora la particularidad acerca del modelo matemático que se está trabajando, es decir el péndulo en el punto de equilibrio estable como un foco estable.

6. EASY JAVA SIMULATIONS (EJS)

EJS es un producto desarrollado por un grupo a cargo de Francisco Esquembre, es un programa basado en lenguaje *java* que tiene como finalidad simular modelos físicos reales en 2 y 3 dimensiones, una de sus principales características es la conexión con programas desarrollados en Matlab (Esquembre F. y Sánchez J., 2005) y *java* convencional. En esta sección se presentan los apartes de la interactividad y uso de EJS.

6.1 Ventana Principal de EJS

La grafica de la figura 7 (Fuente: Autores) muestra la ventana principal de la aplicación EJS. Como se observa, la ventana se compone de 3 etiquetas principales llamadas Descripción, Modelo y Vista. En la etiqueta *Descripción* se ubica todo lo referente a la notación del trabajo que se ha realizado, como por ejemplo la teoría y apartes de los autores.

En la etiqueta *Modelo* se ubica lo referente a la programación o generación de la simulación, por ejemplo la ubicación de variables, la relación entre variables, la forma en que las variables cambian o evolucionan, la conexión de variables con otros programas y los sub programas que se pueden usar internamente creados en versión java.

Por último está la etiqueta *Vista*, la cual cuenta con las herramientas necesarias para crear la interfaz grafica de usuario (GUI), donde se encuentran las opciones de gráficos 2 y 3D entre otras.

6.2 Diseño del prototipo virtual del Péndulo invertido sobre carro deslizante

Usando la sección “Vista” de EJS se genero el modelo tridimensional para el péndulo, como puede verse en la figura 6, (Fuente: Autores) el cual se basa en el prototipo real de la figura 2. Se observa con claridad la existencia de los dos rieles, el carro, el péndulo y los fines de curso, elementos básicos del sistema.

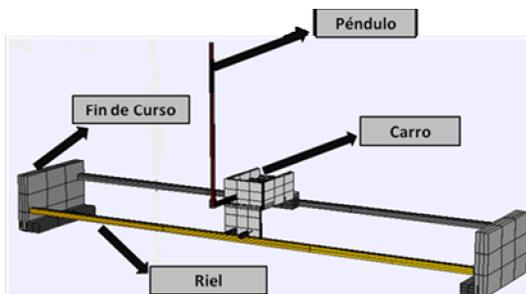


Fig. 6. Prototipo tridimensional de péndulo invertido sobre carro deslizante.

La forma en que se genero el modelo tiene como principal característica el uso del elemento Grupo3D, herramienta de la etiqueta vista, el cual permite en su interior ubicar otros elementos como Caja3D y Cilindro3D los cuales son la base para tener el resultado observado en la figura 6. Esta metodología permite tratar cada elemento de forma independiente, o a todos como uno solo en función de la necesidad del programador. La hoja

donde se observa el árbol general del modelo 3D para el péndulo se observa en la figura 7 (Fuente: autores).

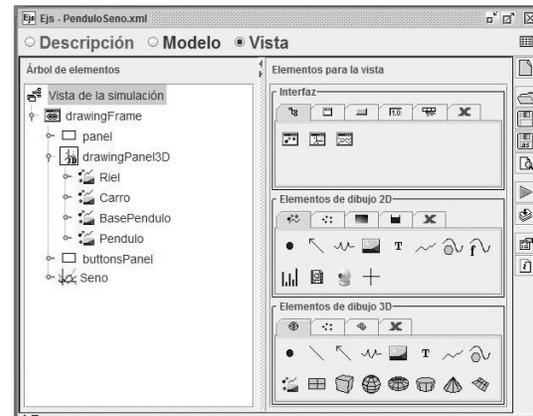


Fig. 7. Hoja que contiene el árbol para el modelo 3D del péndulo tratado.

De la figura 7 se observa la existencia de varios elementos ya mencionados como el Cilindro3D el cual para este caso se llama “Péndulo22”, este tiene entre sus características el que se puede manipular con variables lo cual se observa en una sección posterior. En esta grafica se aprecian los deslizadores llamados “RielLong” y “LonPen” los cuales son variables que cambian en forma de barra deslizadora, un cambio en ellas es un cambio en el modelo generado en matlab del péndulo no lineal en cuestión.

6.3 Definición de variables

En la gráfica de la figura 8 (Fuente: Autores) se muestra la ventana correspondiente a la etiqueta Modelo sección variables, en ella se observan las correspondientes variables que se usaron para generar el modelo del péndulo y poner su carro en movimiento de acuerdo a una oscilación sinusoidal, creada desde un archivo Simulink/Matlab.

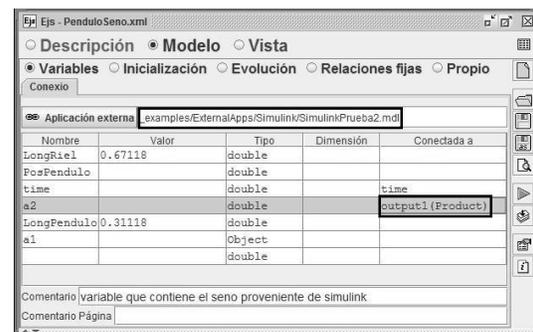


Fig. 8. Ventana de variables usadas en el prototipo tridimensional del péndulo.

De la gráfica de la figura 8 resaltan dos aspectos importantes que se encuentran dentro de los recuadros. El superior hace referencia a la ubicación (externa a EJS) donde se encuentra el modelo de Simulink generado en Matlab, sin esta dirección el modelo de EJS no podría realizar la conexión. En el recuadro inferior se observa que la variable a_2 , usada para ubicar la posición horizontal del carro, está conectada a output1 (Product), la cual es una salida del sistema hecho en Simulink

6.4 Conexión EJS Matlab

Ahora se muestra cómo se mueve el carro del péndulo con una función sinusoidal de Simulink, lo cual lleva interno la conexión de los mencionados programas.

La figura 9 (Fuente: autores) muestra el movimiento del carro del péndulo y la gráfica de la señal sinusoidal que se les está aplicando desde Matlab, los valores de la señal se capturan de Matlab y se muestran en EJS.

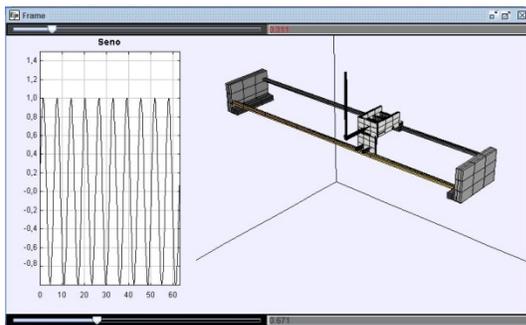


Fig9. Resultado de la de la interacción entre Matlab y EJS.

7. CONCLUSIONES

El modelo matemático no lineal implementado cumple las condiciones mínimas para realizar un prototipo virtual del péndulo invertido sobre carro deslizante.

Para que el modelo matemático sea lo más real posible es necesario tener en cuenta las fricciones que resaltan en su estructura.

La técnica de control RVE permite mantener al péndulo dentro de la vecindad del punto de equilibrio inestable.

EJS permite la creación de un prototipo tridimensional del péndulo invertido sobre carro, para en el desarrollar simulaciones.

EJS permite la vinculación de variables propias de Matlab ya sean de extensión *.m* o *.mdl*

El trabajo desarrollado permite realizar analogías con péndulos físicos de este tipo, dando una vista previa de los resultados reales que se podrían obtener.

El trabajo desarrollado es una herramienta de interactividad entre el simulador y el estudiante, optimizando su aprendizaje.

RECONOCIMIENTO

Este trabajo se pudo desarrollar gracias al Ingeniero Jhon Caipa por su ayuda con Matlab. A los ingenieros Khalil Sultan, Alan Bradshaw y Jindishao, por su ayuda con los modelos matemáticos. Por último, al ingeniero Francisco Esquembre, por su desarrollo del trabajo EJS.

REFERENCIAS

- Pardo G., A. y Díaz R., J. L. (2004). *Aplicaciones de los convertidores de frecuencia, Estrategias PWM*, Editorial Java E. U., Colombia.
- Delgado M. (2009). *Laboratorio virtual de control inteligente*, Universidad autónoma de occidente facultad de ingeniería, Colombia.
- Aranda J., Dormido S., Muñoz R., Chaos D., Diaz J. (2003). *Entorno de Simulación Interactiva para el control de Posicionamiento Dinámico de una Plataforma Marina Amarrada.*, España.
- Esquembre F., Sanchez J. (2005). *Easy Java Simulations, Using Ejs to run Simulink models in an interactive way for version 3.4*, España.
- Sultán K. (2005). *Inverted Pendulum*. Pakistan.
- Cely H., Riaño J., Rodríguez O. (2011) *Modelado, diseño y control de swing up y balanceo del péndulo invertido sobre carro deslizante*. Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia, Colombia
- Lam J. *Control of An Inverted Pendulum*
- Caipa J., Rodríguez J. (2009). *Modelado, diseño y control de swing up y balanceo del péndulo invertido rotacional*. Universidad Pedagógica y tecnológica de Colombia, Colombia.

Bradshaw A., Shao J. (1996). *Swing Up control of inverted Pendulum systems*. Lancaster University Engineering Department.

Díaz H., (2006), Apuntes de clase. Universidad Nacional de Colombia.

Serway R., Faughn J. (2001). Física 5 Edición. Pearson Educación. México.

Boris J., Paul J. (2000). *Clasical control feedback with Matlab*. Marcel Dekker, USA.

Doyle J., Francis B., Tannenbaum A (1990). *Feedback Control theory*. Macmillan Publishing Co.