

**STABILITY AND NUMERICAL DISPERSION IN THE RTM SEISMIC  
MIGRATION IN 2D****ESTABILIDAD Y DISPERSIÓN NUMÉRICA DE LA MIGRACIÓN SÍSMICA  
RTM EN 2D****PhD. Francisco Henry Cabrera Zambrano, Fís. Jesús David Castaño Carrillo  
PhD. Flor Alba Vivas Mejía****Universidad de Pamplona.**

Departamento de Física y Geología - Grupo PANGAEA.  
Ciudadela Universitaria. Pamplona, Norte de Santander, Colombia.  
Tel.: +(577) - 568 5303, Fax: +(577) - 568 5303, Ext. 144.  
E-mail: fcabrera61@yahoo.com.br, vaca2185@gmail.com, fvivas2010@gmail.com.

**Abstract:** The reverse migration over time is considered the most accurate method for migrating seismic data. Its main constraint is the high computational cost therefore requires numerical methods that reduce the computation time of the extrapolation of the fields is particularly important. In this paper, finite difference methods, the pseudo spectral method and rapid expansion method for reverse time migration, also analyzing the stability conditions, numerical dispersion and computational cost of each of them.

**Keywords:** Seismic migration, finite difference, RTM, pseudo spectral method.

**Resumen:** La migración reversa en el tiempo se considera el método más preciso para migrar datos sísmicos. Su principal restricción es el alto costo computacional que requiere, por tanto los métodos numéricos que disminuyan el tiempo de cómputo de la extrapolación de los campos es particularmente importante. En este trabajo se presentan los métodos de diferencias finitas, el método pseudo espectral y el método de expansión rápida para migrar reversa en el tiempo, analizando también las condiciones de estabilidad y dispersión numérica de cada una de ellos.

**Palabras clave:** Migración sísmica, diferencias finitas, RTM, método pseudo-espectral.

**1. INTRODUCCIÓN**

Dentro de la geofísica de exploración los métodos son clasificados como pasivos y activos. Los métodos pasivos son aquellos que realizan la medición de un campo producido de manera natural y permanente por la Tierra, dentro de ellos se encuentran los métodos magneto métrica y gravimétrica.

Los métodos activos por el contrario requieren una fuente de corta duración que puede ser natural o articula. Dentro de los métodos activos de fuente

natural se encuentran los utilizados en sismología y de fuente artificial el método sísmico para la exploración de recursos naturales.

Este trabajo se enmarca dentro del método sísmico para la exploración de hidrocarburos. El método sísmico para exploración, involucra la activación de una fuente impulsiva que genera una ondeleta la cual se propaga en el subsuelo.

La descripción de la propagación de dicha perturbación se realiza a través de la mecánica de los medios continuos, específicamente con la teoría

de propagación de ondas en medios elásticos. Dentro de la exploración sísmica se utilizan las técnicas de reflexión y refracción sísmica. La técnica de reflexión es la más utilizada en la exploración de hidrocarburos por su capacidad de penetración en el subsuelo.

## 2. ECUACIÓN ELASTODINÁMICA PARA UN MEDIO ISÓTROPICO Y HOMOGÉNEO

La ecuación de Newton aplicada al movimiento de un elemento de volumen del medio continuo bajo la aproximación de pequeñas deformaciones se expresa como:

$$\mathbf{t}_{ij,j} + \mathbf{r}f_i = \frac{D\mathbf{u}_i}{D_t} \quad (1)$$

Se muestra que en este caso la ecuación electrodinámica se puede separar en una onda escalar asociada a las deformaciones volumétricas y en una vectorial asociada a los cambios en los ángulos en el cuerpo (Pujol, 2003). Después de una serie de operaciones algebraicas, se obtiene

$$\mathbf{a}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{b}^2 \nabla x (\nabla x \mathbf{u}) + f = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (2)$$

La ecuación (2) es conocida como la ecuación de onda elástica de Navier (Florez *et al.*, 2007). Se observa que esta es una ecuación vectorial y es válida en cualquier sistema de coordenadas ortogonales con las definiciones correspondientes de gradiente, divergencia y rotacional.

Como  $\nabla \cdot (\nabla x (\nabla x \mathbf{u}))$  entonces la ecuación se reduce a:

$$\frac{1}{\mathbf{a}^2} \nabla^2 \mathbf{j} + \nabla \cdot f = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3)$$

Esta es la ecuación de onda escalar con término fuente (Claerbout and Doherty, 1972).

## 3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA POR DIFERENCIAS FINITAS

La propagación de las ondas sísmicas en un medio acústico, se modela con una ecuación de onda escalar para el campo de presión P sin fuente y corresponde con la propagación de las ondas longitudinales (Afanador *et al.*, 2012).

En sísmica 2D el campo de velocidades se asume entonces la ecuación se reduce a:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4)$$

Aproximando la función P por medio de las series de Taylor, truncando después del tercer orden y tomando la función hacia adelante y hacia atrás, obteniendo así el operador de segundo orden de diferencias finitas.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x + \Delta x, z, t) - 2u(x, z, t) + u(x - \Delta x, z, t)}{(\Delta x)^2} \quad (5)$$

De la misma forma para  $z$  y  $t$ , La solución numérica por diferencias finitas de la ecuación de onda utiliza la discretización de las variables temporal y espacial. De esta forma el campo de presión puede ser representado por:

$$u(x, z, t) = (l\Delta x, m\Delta z, n\Delta t)$$

Donde  $\Delta x$  y  $\Delta z$  son los pasos de la malla en las direcciones  $x$ ,  $z$  y  $\Delta t$  es el paso de tiempo utilizado. Numéricamente tenemos una malla de tres índices. Para simplificar la notación, se puede escribir el campo de presión como donde se separa el índice temporal  $n$  de los índices espaciales  $l$  y  $m$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(c\Delta t)^2} [u_{l,m}^{n+1} - 2u_{l,m}^n + u_{l,m}^{n-1}] &= \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{l+1,m}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l-1,m}^n] \\ &= \frac{1}{(\Delta z)^2} [u_{l,m+1}^n - 2u_{l,m}^n + u_{l,m-1}^n] \end{aligned} \quad (6)$$

Esta ecuación representa la ecuación en diferencias (Suzarthe, 2010).

## 4. ESTABILIDAD NUMÉRICA

La estabilidad está relacionada con garantizar que un algoritmo no acumule errores de redondeo o aproximación que hagan crecer la solución hasta alcanzar el *overflow*. Para analizar la estabilidad del algoritmo se considera una onda plana sinusoidal que se propaga en un espacio bidimensional, de la siguiente forma:

$$u_{l,m}^n = u_0 e^{i(n)} \quad (7)$$

Donde  $u_0$  es la amplitud de la onda,  $l$  y  $m$  son las componentes del vector de onda en  $x$  y  $z$ . Si consideremos que la frecuencia es compleja se nos presenta tres situaciones:

- La onda con amplitud constante en el tiempo.

- b) La amplitud de la onda con decaimiento exponencial en el tiempo.  
c) La amplitud de la onda con aumento exponencial en el tiempo.

Sustituyendo la solución de onda plana (7) en la ecuación en diferencia (6) y utilizando algunas funciones trigonométricas podemos obtener la región estable (Gazdag, 1978).

$$\Delta t_{estable} \equiv \frac{1}{c \left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2} \right]} > \Delta t \quad (8)$$

## 5. DISPERSIÓN NUMÉRICA

La dispersión numérica ocurre cuando las velocidades con que se propagan las diferentes componentes de frecuencia del pulso sísmico durante la propagación no corresponden con la velocidad de propagación de la onda en el medio, produciendo la deformación del pulso.

$$\frac{v_f}{c} = \frac{2}{ck\Delta t} \arcsin \left[ \mathbf{a}_x^2 \sin^2 \left( \frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \mathbf{a}_z^2 \sin^2 \left( \frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right] \quad (9)$$

Esta ecuación representa la dispersión numérica en el método de diferencias finitas, cuando la velocidad de fase es igual a la velocidad de grupo se dice que no existe dispersión (Gazdag, 1978).

## 6. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ONDA ACÚSTICA POR EL MÉTODO PSEUDO-ESPECTRAL

El método de Pseudo-espectral aproxima las derivadas en una ecuación diferencial, utilizando la propiedad de la derivada de la transformada de Fourier la cual es obtenida numéricamente con el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier o FFT (Cooley and Tukey, 1965). Dada la función  $f(x)$  se denota la transformada de Fourier por  $\hat{f}(k)$  con  $k$  el número de onda, (Gazdag, 1978). La propiedad de la derivada de la transformada de Fourier es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F^{-1} \left[ ik \hat{f}(k) \right]$$

Para la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = F^{-1} \left[ -k^2 \hat{f}(k) \right]$$

Reemplazando en la ecuación (4) obtenemos la discretización del operador Laplaciano.

$$u_{l,m}^{n+1} = \mathbf{a}^2 \nabla^2 + 2u_{l,m}^n - u_{l,m}^{n-1}$$

Esta relación es la discretización de la ecuación de onda escalar obtenida por (Suzarthe, 2010).

## 7. MIGRACIÓN RTM

La migración puede ser entendida como un problema inverso donde a partir de los datos sísmicos registrados en superficie, se debe recuperar la función reflectividad  $d = u(x, z = 0, t)$  por tanto es un problema inverso del medio (Achenbach, 1973).

La migración sísmica es un proceso basado en la ecuación de onda que remueve distorsiones de registros de reflexiones en una sección apilada, llevando los reflectores a sus posiciones espaciales e inclinaciones correctas y colapsando las difracciones a sus puntos de dispersión (Baysal *et al.*, 1983).

La migración sísmica se divide en pos-apilado y pre-apilado. La migración pos-apilado se realiza sobre la sección apilada o sección de distancia fuente receptor nula (*zero offset*) y la pre-apilado se realiza sobre los sismogramas obtenidos de cada explosión, cuando la complejidad geológica no permite obtener una sección apilada de forma correcta (Schneider, 1978).

## 8. EXPLICACIÓN DEL ALGORITMO RTM EN 2D

El programa está escrito en C, pero necesita del Sísmic Unix (SU), que es un software, que está hecho para plataforma Linux y modela y migra la propagación de ondas con diferentes métodos y diferentes propiedades.

Principalmente el programa realiza las siguientes operaciones:

- I. El campo de velocidades se asume.

II. Se define en una Shell los parámetros de entrada que son las mallas espaciales y la malla temporal, además el método que se va a utilizar para cada parte de la ecuación en diferencias.

III. Se llama la condición de frontera que lleva una función exponencial decreciente para eliminar las múltiples.  $e^{-Fx^2(nxb-t)^2}$ .

IV. Se inicializa los pasos de malla y se llama la condición de estabilidad (Ecu. 8).

V. Se inicializa el primer disparo, modela y migra y sigue con el siguiente disparo hasta terminar con el número total de disparos.

VI. Aplica la condición de imagen.

$$R(x, z, t) = \sum_t \frac{u(x, z, t)}{D(x, z, t)}$$

VII. Fin del programa.

## 9. RESULTADOS

El modelo Marmousi fue creado en 1988 por el Instituto Francés del Petróleo (IFP). La geometría de este modelo es basado en un perfil de la El dato Marmousi es utilizado para evaluación de algoritmos en procesamientos de datos sísmicos como migración e inversión.

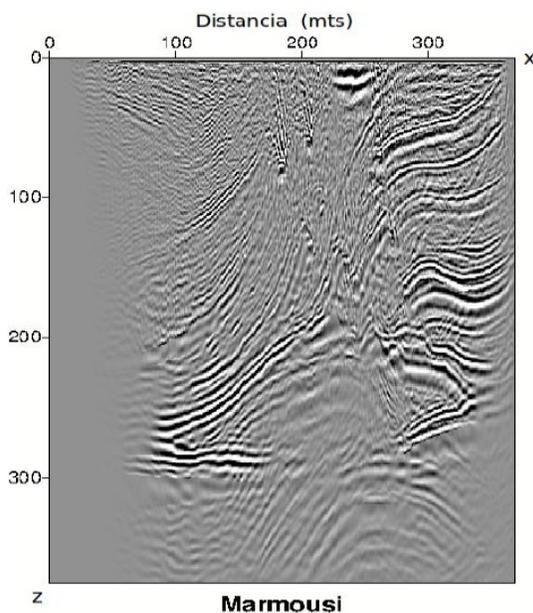


Fig. 1. Discretización de segundo orden en tiempo y en espacio.

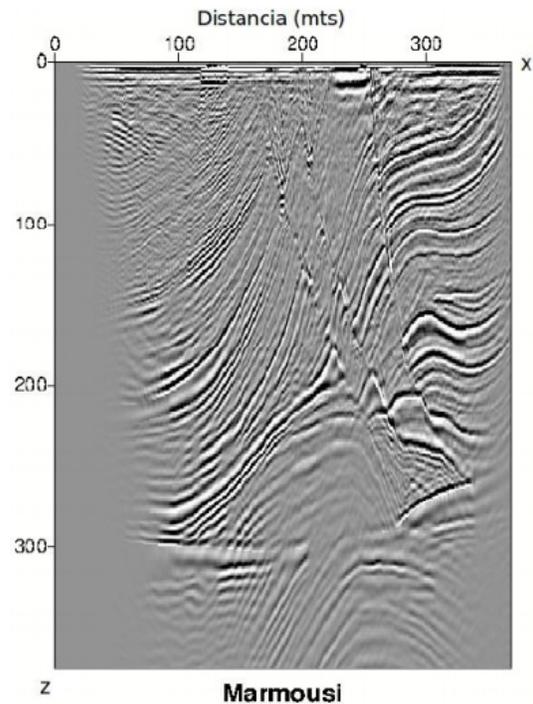


Fig. 2. Discretización de segundo orden en tiempo y cuarto orden en el espacio.

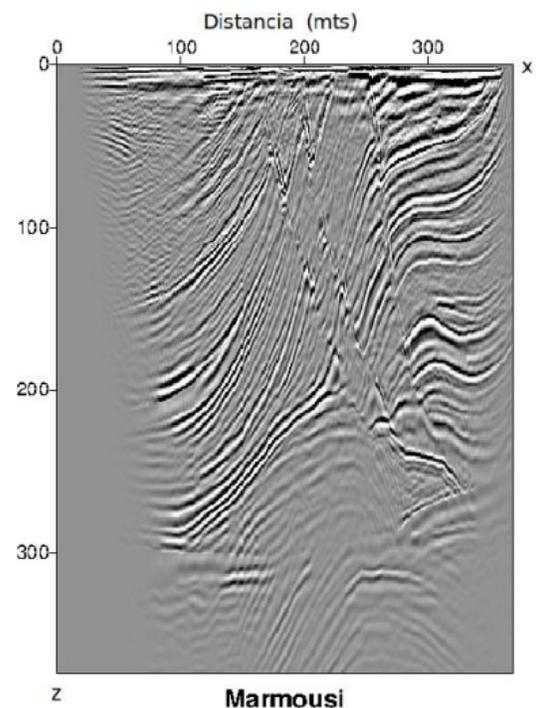


Fig. 3. Discretización de segundo orden en tiempo y sexto orden en el espacio.

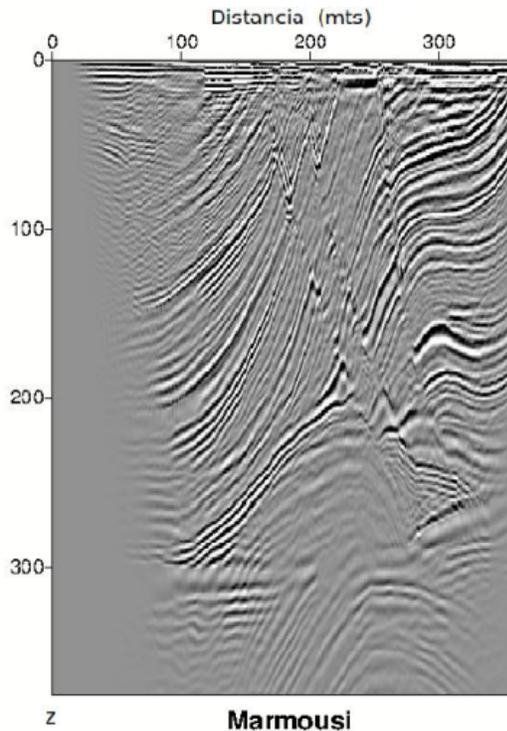


Fig. 4. Discretización de segundo orden en tiempo y octavo orden en el espacio.

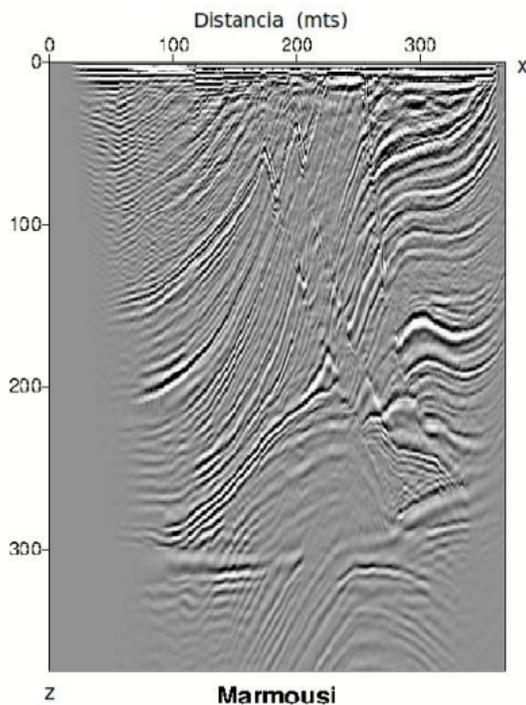


Fig. 5. Discretización de segundo orden en tiempo y pseudo-espectral en el espacio.

## 10. CONCLUSIONES

La Ecu. (8) que se obtiene después de un razonamiento y tratamiento matemático es la condición que se necesita para que el algoritmo no tenga *overflow* o desbordamiento que es cuando el tamaño de los datos entrantes exceden el tamaño de la malla, de la misma forma la Ecu. (9) permite encontrar la forma de que no exista tampoco dispersión numérica debido a que se debe tener mucho cuidado a la hora de escoger la malla, sino se quiere que no se den los resultados esperados.

La comparación de las imágenes se realizó con el modelo sintético Marmousi, la comparación fue cuantitativa y se utilizó la herramienta Matlab para obtener este error, este se obtuvo de relacionar píxeles de la imagen sintética, con las obtenidas. Lo que se obtiene es que el método de diferencias finitas es menos costoso computacionalmente, es decir, el tiempo de cómputo de las primeras aproximaciones de la ecuación de onda requieren poco tiempo (tabla 1), pero los resultados que se obtienen al modelar y al migrar son de muy baja calidad en la imagen sísmica, por el contrario el método pseudo espectral ofrece una mejor calidad en la imagen sísmica pero requiere de un mayor tiempo de cómputo para el desarrollo del método.

Por lo tanto la imagen sísmica es mejor con el método Pseudo-espectral que con el método de diferencias finitas. La ecuación de onda acústica por el método de diferencias finitas es menos exacta en la aproximación por el truncamiento que depende del orden en el cual se va a utilizar, por esto el método pseudo-espectral es la mejor aproximación de la discretización de la ecuación de onda acústica.

Por lo tanto se comprueba que numéricamente y teóricamente la calidad de la imagen sísmica depende del orden del método que se utilice y que las relaciones de dispersión numérica y estabilidad nos arrojaron los resultados esperados para los dos métodos.

*Tabla 1: Datos obtenidos de los experimentos numéricos realizados con los métodos de discretización de la ecuación de onda acústica*

Método de Diferencias finitas (espacio)		
Orden	Tiempo	Error
2°	40 min, 14s	65.75%
4°	75 min, 23s	63.24%
6°	157 min, 27s	62.24%
8°	245 min, 10s	62.05%

<b>Método Pseudo-espectral</b>		
	Tiempo	Error
	720min, 23s	38.75%

### RECONOCIMIENTO

Este trabajo fue financiado por el proyecto COLCIENCIAS – ECOPEPETROL titulado: “Migración sísmica pre-apliado en profundidad por extrapolación de campos de ondas utilizando computación de alto desempeño para datos masivos en zonas complejas”

### REFERENCIAS

Achenbach, J. (1973). Wave propagation in elastic solids, North-Holland, Amsterdam.  
 Afanador G., N.; Sanjuán P., Y. y Medina C., D. (2012). Diseño sísmico de muros de contención en gravedad y voladizo. Revista Colombiana de Tecnologías y Avanzadas, Vol. 2, No. 20.

Baysal, E., Kosloff, D. D., and Sherwood, J. W. C. (1983). Reverse time migration, Geophysics, Vol.48, pp. 1514-1524.  
 Claerbout, J. F., and Doherty, S. M. (1972). Downward continuation of moveout corrected seismograms, Geophysics, Vol. 37, pp. 741-768.  
 Cooley, J. W. and Tukey, J. W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Mathematics of Computation, Vol. 19, pp. 297–301.  
 Florez, E. G.; Cardona F., S. y Martínez M., J. (2007). Fundamentos básicos en el análisis de señales de vibración. Revista Colombiana de Tecnologías y Avanzadas, Vol. 2, No. 10.  
 Gazdag, J. (1978). Wave equation migration with the phase shift method, Geophysics, Vol.73, No.2, pp. 1342-1351.  
 Pujol, J. (2003). Elastic Wave Propagation and Generation in Seismology.  
 Schneider, W. A. (1978). Integral formulation for migration in two and three dimensions, Geophysics, Vol.43, pp. 49-76.  
 Suzarthe de Araujo, E. (2010). Analise dos métodos de diferenças finitas e expansaco rapida na migrasaco reversa no tempo, pp. 340-360.