Revista Digital
Conocimiento Investigación Educación

Método Iterativo de Derivación por Fórmula Unificada

Iterative Method of Derivation by Unified Formula

Carlos Rodríguez Florez[1].

INFORMACIÓN DEL ARTICULO

Fecha de recepción: 22 de Julio de 2019.
Fecha de aceptación: 05 de Agosto de 2019.

[1]Especialista en Física General. Investigador Universidad del Atlántico. Colombia.
E-mail: rodriguezflorezcarlos@gmail.com

CITACIÓN: Rodríguez-Florez, C. (2019). Método Iterativo de Derivación por Fórmula Unificada. Revista Conocimiento, Investigación y Educación. Vol. 2. (8), 01-07.

Resumen

Objetivo: Esta investigación se la realizó con el fin de proponer un método de derivación el cual unifica todos los métodos tradicionales conocidos. Método: Se desarrolló una investigación de tipo cuantitativa, recolectándose la información a partir de la aplicación de encuestas realizadas a los estudiantes y docentes. Resultados: Los estudiantes aplicaron el método iterativo (una sola fórmula) en la derivación de funciones básicas obteniendo el mismo resultado al usar el método tradicional (varias fórmulas), y en menos tiempo. Conclusiones: Este nuevo método tiene utilidad en los cursos de cálculo tanto en la educación formal como en educación superior.

Palabras Clave: *derivación, iteración, función, sumatoria, productora, producto funcional.*

Abstract

Objective: This research was carried out in order to propose a derivation method which unifies all the traditional known methods. Method: A quantitative research was carried out, collecting the information from the application of surveys carried out on students and teachers. Results: The students applied the iterative method (a single formula) in the derivation of basic functions, obtaining the same result when using the traditional method (several formulas), and in less time. Conclusions: This new method is useful in calculus courses both in formal education and in higher education.

Keywords: *derivation, iteration, function, summation, producer, functional product.*

ISSN: 2539-5289

Introducción

En el proceso de enseñanza – aprendizaje del cálculo diferencial es necesario que el estudiante aprenda propiedades de derivación, como: propiedades básicas de derivadas de funciones algebraicas (constante, idéntica, potencia, constante por una potencia, polinómica, producto, cociente y raíz n-ésima de una función); trigonométricas, exponenciales, logarítmicas; y regla de la cadena.

En este trabajo se propone un método iterativo de derivación por formula unificada, la cual simplifica las propiedades de derivación en una sola función. Ahora, los estándares básicos de competencias en matemáticas establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia, un pilar fundamental para el estudio del cálculo es el pensamiento variacional, el cual se construye desde la Educación Básica Primaria mediante distintos caminos y acercamientos significativos como las variaciones de números y figuras geométricas, pasando por la Educación Básica Secundaria a través del álgebra como sistema de representación y descripción de fenómenos de variación y cambio; llegando a Educación Básica Media y Superior con modelos matemáticos, relaciones y funciones con sus correspondientes propiedades, representaciones gráficas y sistemas analíticos.

Con base en lo anterior esta investigación se apoya en el pensamiento variacional, el cual cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales, sociales y las matemáticas mismas.

Bases Teórico

Formulación

Sea el funcional $\boldsymbol{y}=\prod_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}(F(x)_k)^{E_k}$ su fórmula de derivación está dada por:

$$\frac{dy}{dx}=\prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k}.\sum_{k=1}^{j}\left\{\frac{E_k}{F(x)_k}.\frac{d(F(x)_k)}{dx}+\ln F(x)_k.\frac{d(E_k)}{dx}\right\} \qquad \text{Ec. (1)}$$

A continuación, se describe la nomenclatura de los términos y variables que intervienen en las fórmulas.

$\prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k}$: Se le denomina funcional pi (π), y es equivalente a la variable y

$$\sum_{k=1}^{j}\left\{\frac{\boldsymbol{E_k}}{\boldsymbol{F(x)_k}}\left[\frac{\boldsymbol{d(F(x)_k)}}{\boldsymbol{dx}}\right]+\ln F(x)_k.\frac{\boldsymbol{d(E_k)}}{\boldsymbol{dx}}\right\}$$

Se le denomina función sigma (Σ), y es equivalente a la sumatoria de las derivadas de cada uno de los términos del que se compone la función pi (π).

$\boldsymbol{E_k}$ **:** Es el exponente k-esimo de los términos de la función pi (π).

$\boldsymbol{F(x)_k}$ **:** Es la base k-esimo de los términos de la función pi (π).

$\frac{\boldsymbol{d(F(x)_k)}}{\boldsymbol{dx}}$: Es la derivada de la base k-esima de los términos de la función pi (π).

$\ln F(x)_k$ **:** Es el logaritmo de la base k-esimo de los términos de la función pi (π).

CIE. Vol.2. (8). Diciembre 2019, pp. 01-07

ISSN: 2539-5289

$\frac{\boldsymbol{d(E_k)}}{\boldsymbol{dx}}$ **:** Es la derivada del exponente k-ésimo de los términos de la función pi (π).

Demostración

Sea la función: $y = \left(F(x)\right)^{E_1}$ donde y es una función cualquiera. Ahora aplicando logaritmo neperiano se tiene que:

$$\ln y = \ln(F(x))^{E_1} \Rightarrow \ln y = E_1.\ln F(x) \Rightarrow \frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d(E_1.\ln F(x))}{dx}$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{E_1}{F(x)}.\frac{d(F(x))}{dx} + \ln F(x).\frac{d(E_1)}{dx} \Rightarrow despejando\ \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y.\left\{\frac{E_1}{F(x)}.\frac{d(F(x))}{dx} + \ln F(x).\frac{d(E_1)}{dx}\right\} \Rightarrow reemplazando\ y$$

$$\frac{dy}{dx} = (F(x))^{E_1}\left\{\frac{E_1}{F(x)}.\frac{d(F(x))}{dx} + \ln F(x).\frac{d(E_1)}{dx}\right\}$$

Pero para y como producto funcional, entonces $\boldsymbol{y = \prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k}}$, donde si aplicamos $\ln \boldsymbol{y} = \ln \prod_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(F(x)\right)^{E_k}{}_{\boldsymbol{k}}$, $k \in N\ con\ 1 \leq k \leq n,$

Desarrollando la expresión.

$$\ln y = \ln(F(x))^{E_1}{}_1 + \ln(F(x))^{E_2}{}_2 + \cdots + \ln(F(x))^{E_n}{}_n$$

Derivando tenemos.

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \frac{d\left(\ln(F(x))^{E_1}{}_1\right)}{dx} + \frac{d\left(\ln(F(x))^{E_2}{}_2\right)}{dx} + \cdots + \frac{d\left(\ln(F(x))^{E_n}{}_n\right)}{dx}$$

$$\frac{d(\ln y)}{dx} = \sum_{k=1}^{n}\frac{d\left(\ln(F(x))^{E_n}{}_n\right)}{dx},$$

Desarrollando la derivada, tenemos.

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{E_k}{F(x)_k}.\frac{d(F(x)_k)}{dx} + \ln F(x)_k.\frac{d(E_k)}{dx}\right\},$$

Despejando

$$\frac{dy}{dx} = y.\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{E_k}{F(x)_k}.\frac{d(F(x)_k)}{dx} + \ln F(x)_k.\frac{d(E_k)}{dx}\right\}$$

Pero, $y = \prod_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}(F(x)_k)^{E_k}$, sustituyendo para $\frac{dy}{dx}$, tenemos que,

$$\frac{dy}{dx} = \prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k}.\sum_{k=1}^{j}\left\{\frac{E_k}{F(x)_k}.\frac{d(F(x)_k)}{dx} + \ln F(x)_k.\frac{d(E_k)}{dx}\right\}$$

De esta manera queda demostrada la formula general de la derivada de un funcional algebraico o trascendental.

Nota: La determinación de colocar diferentes límites tanto de funcionales pis como de funciones sigma internas es debido a que la naturaleza de sus cantidades puede ser diferentes, es decir, veamos como ejemplo el posible caso en que n=3 (Numero de funciones) y j=5 (Numero de funciones internas de una función), con la condición de que j ≥ n pero que no afectan el desarrollo en el cálculo de la derivada de una función determinada.

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 1: Derivada de un producto de funciones

$y = (x^3 - 1)^2(x^2 + x)^3$

Solución:

Aplicando el método iterativo, se tiene que:

$$\frac{\boldsymbol{d(y)}}{\boldsymbol{dx}} = \prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k}\sum_{k=1}^{j}\left\{\frac{E_k}{F(x)_k}\left[\frac{d(F(x)_k)}{dx}\right] + \ln F(x)_k\frac{d(E_k)}{dx}\right\}$$

CIE. Vol.2. (8). Diciembre 2019, pp. 01-07

ISSN: 2539-5289

$\prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k} = (x^3-1)^2(x^2+x)^3$, y desarrollando la función sigma como sigue:

$$\left\{\frac{2}{(x^3-1)}(3x^2)+\ln(x^3-1)(0)+\frac{3}{(x^2+x)}(2x+1)+\ln(x^2+x)(0)\right\}$$

$$\left\{\frac{2}{(x^3-1)}(3x^2)+\frac{3}{(x^2+x)}(2x+1)\right\}=\left\{\frac{6x^2}{(x^3-1)}+\frac{3(2x+1)}{(x^2+x)}\right\}$$

Donde finalmente el cálculo de la deriva $\frac{dy}{dx}$ quedara:

$$\frac{dy}{dx}=(x^3-1)^2(x^2+x)^3\left\{\frac{6x^2}{(x^3-1)}+\frac{3(2x+1)}{(x^2+x)}\right\}$$

Ejemplo 2: Derivada de un cociente de funciones

$$y=\frac{(x^4-3)^5}{(x^3+2)^3x^2}$$

Solución:
Expresando la función como producto, se tiene

$$y=(x^4-3)^5(x^3+2)^{-3}x^{-2}$$

Ahora se procede al uso del método de iteración

$\prod_{k=1}^{n}(F(x)_k)^{E_k}=(x^4-3)^5(x^3+2)^{-3}x^{-2}$

El desarrollo de la función sigma es:

$$\left\{\frac{5(4x^3)}{(x^4-3)}+\ln(x^4-3)(0)+\frac{(-3)(3x^2)}{(x^3+2)}+\ln(x^3+2)(0)+\frac{(-2)(1)}{x}+\ln(x)(0)\right\}$$

$$\left\{\frac{20x^3}{(x^4-3)}-\frac{9x^2}{(x^3+2)}-\frac{2}{x}\right\}$$

Finalmente, la derivada que se obtiene, es

$$\frac{dy}{dx}=(x^4-3)^5(x^3+2)^{-3}x^{-2}\left\{\frac{20x^3}{(x^4-3)}-\frac{9x^2}{(x^3+2)}-\frac{2}{x}\right\}$$

Abreviadamente,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^4-3)^5}{(x^3+2)^3x^2}\left\{\frac{20x^3}{(x^4-3)}-\frac{9x^2}{(x^3+2)}-\frac{2}{x}\right\}$$

Método

Este trabajo está basado en el diseño de acción-participativa, el cual (Durston y Miranda, 2002), proponen: “El proceso de investigación debe estar basado en un sistema de discusión, indagación y análisis, en el que los investigados formen parte del proceso al mismo nivel que el investigador”. Las teorías no se desarrollan de antemano, para ser comprobadas o esbozadas por el investigador a partir de un contacto con la realidad. Ésta se describe mediante el proceso por el cual una comunidad crea sus propias teorías y soluciones sobre sí misma.

Con lo mencionado anteriormente, se persigue el mejoramiento académico de los estudiantes. A partir del modelo de investigación-acción, serán incitados a investigar, con la implementación de esta metodología se quiere realizar el estudio de una situación, como es la resolución de derivadas de funciones algebraicas y transcendentales en discentes con a través de la universidad UITSA y permitir la participación de todas las personas involucradas en el plan de acción, como el grupo de docentes de cálculo.

Este trabajo de investigación posee un enfoque que involucra el análisis de datos

ISSN: 2539-5289

cuantitativos del estudio realizado en la población escogida. Esto apunta a lo que se formula y plantea.

Recogida y Organización de los Datos

La técnica e instrumento utilizado en el desarrollo de esta investigación para la recolección de los datos es la encuesta. Esta se aplicó en dos etapas; una ponencia realizada en el auditorio de la universidad UITSA y la segundo una muestra de estudiantes de diferentes programas de ingeniería de la misma institución como grupo piloto.

Primera Etapa

La encuesta aplicada fue un instrumento utilizado que permitió contrastar el método tradicional del método iterativo desarrollado por el ponente a través de preguntas con opciones: Excelente, Bueno, Regular, Malo y Muy malo.

Las preguntas son:

1. ¿El contenido de la ponencia me pareció?

2. ¿La intensidad horaria de la ponencia respecto a sus contenidos, me pareció?

3. ¿El nivel de comunicación por parte de los ponentes, me pareció?

4. ¿Los recursos físicos y tecnológicos disponibles para el desarrollo de la ponencia me parecieron?

5. ¿La aplicabilidad de lo aprendido es?
6. ¿El nivel de satisfacción, aprendizaje y cumplimiento de expectativa es?

7.Observaciones y sugerencias. Escriba su respuesta.

La pregunta siete (7) fue una pregunta abierta.

Segunda Etapa

En esta segunda etapa se tuvo en consideración un grupo piloto en el cual los estudiantes trabajaron ejercicios referentes al método iterativo que permite responder las siguientes preguntas:

1. ¿El método me pareció?
2. ¿El método iterativo en comparación con la forma tradicional es?
3. ¿La sencillez de uso del método iterativo es?
4.El nivel de satisfacción, aprendizaje y cumplimiento de expectativa es:
5.La comprensión de la notación del método iterativo es:
6.Observaciones y sugerencias.

La pregunta seis (6) fue una pregunta abierta.

Resultados

A continuación, se mostrarán lo que se considera más relevante de los resultados obtenidos en las encuestas realizadas en la primera y segunda etapa.

Primera etapa

Gráfico 1
Ponencia

Elaboración Propia (2019)

CIE. Vol.2. (8). Diciembre 2019, pp. 01-07

ISSN: 2539-5289

Se evidencia que el contenido de la ponencia para los asistentes dentro de la categoría excelente y bueno obtuvo un alto calificativo.

Gráfico 2
Duración de la Ponencia

Elaboración Propia (2019)

Con respecto a la duración de la ponencia el calificativo de regular no supera el 13% y mientras que para el rango de excelente y bueno supera el 80%.

Gráfico 3
Nivel de Comunicación

Elaboración Propia (2019)

El nivel de comunicación de los ponentes se considera satisfactoria en un alto porcentaje dentro del rango de excelente y buen.

Gráfico 4
Recursos Físicos y Tecnológicos Disponibles

El auditorio de la Universidad UITSA presentó un calificativo en el rango de excelente y bueno que supera el 95% en cuanto a recursos físicos y tecnológicos disponibles.

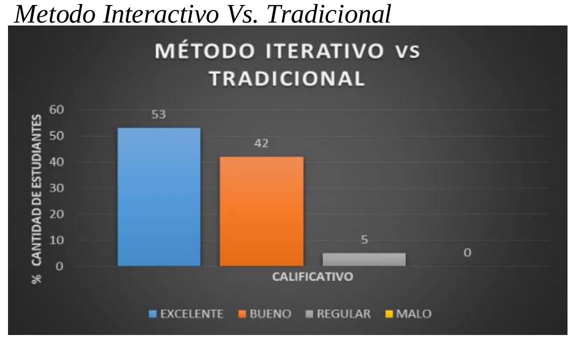
Gráfico 5
Nivel de Satisfacción

Elaboración Propia (2019)

Los participantes en la ponencia presentaron un nivel de satisfacción superior a un 95% en el rango de excelente y bueno.

Segunda Etapa (Encuesta Grupo Piloto)

Gráfico 6
Metodo Interactivo Vs. Tradicional



Elaboración Propia (2019)

Solo el 5% del grupo control considera un calificativo regular y el 95% dentro del rango excelente y bueno, esto muestra la aceptación que tuvo el método iterativo en los estudiantes, en el cual ellos consideran que el proceso de derivación se realiza en menos tiempo y un nivel de menor complejidad en comparación al método tradicional.

ISSN: 2539-5289

Conclusiones

En el método de derivación iterativa se unifican las propiedades básicas de derivación de funciones algebraicas (constante, idéntica, potencia, constante por una potencia, polinómica, producto, cociente y raíz n-ésima de una función), trigonométrica, logarítmica, exponencial; y regla de la cadena.

En los estudiantes se desarrolla el pensamiento variacional como lo exige los estándares básicos de competencias, propuestos por el MEN a través del método de derivación iterativa.

En la institución educativa formal es una alternativa en el estudio del cálculo.

El método iterativo de derivación mediante formula unificada es una alternativa para el docente de cálculo de educación superior.

Referencias Bibliográficas

Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia. (2011). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!, EDUTEKA.

Apostol, T. (1975). Calculus. Volúmenes 1 y 2. Editorial Reverte: Barcelona.

Richard, C. & Fritz J. (1979). Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 1 y 2 Limusa: México.

leithold, L. (1992). El Cálculo con Geometría Analítica. Sexta edición. Editorial Harla. México.

Stewart, J. (2007). Calculo Diferencial e Integral. Segunda edición. Thomson Editores. México.

Larson, E. & Hostetler, R. (2015). Cálculo y Geometría Analítica. Sexta edición. Editorial McGraw-Hill. Madrid.

Michael, S. Cálculo Infinitesimal (Vol. 1 y 2). Editorial Reverte: Barcelona, 1970.

Peláz, F. Cálculo. Oficina de Apuntes CECEA: Montevideo, 2001.

Elon, L. & Lima. Curso de Analice. Vol. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPQ: Rio de Janeiro, 1982.

Richard, C. & Fritz, J. Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Vol. 1 y 2 Limusa: México 1979.

CIE. Vol.2. (8). Diciembre 2019, pp. 01-07

ISSN: 2539-5289