Bistua:Revista de la Facultad de Ciencias Básicas.2019.17(2):234-238

Sobre el problema de regularización con funciones generalizadas

On the regularization problem with functions generalized

Rafael Antonio Niño Rodríguez., Ariel Rey Becerra Becerra

Facultad de Ciencias Basicas. Departamento de Física y Geología. Universidad de Pamplona, Grupo de investigación INTEGRAR Pamplona,Colombia

Resumen

En la física y matemáticas existen conceptos idealizados como densidad de un punto material, densidad de carga puntual, intensidad de una fuente instantánea, etc., necesarios en problemas reales de ingeniería y física. Tratar este tipo de conceptos de forma correcta se hace con la teoría de funciones generalizadas, cuyas propiedades se salen del marco de las propiedades de las funciones convencionales. El concepto de función generalizada es una generalización del concepto convencional de función y abarca funciones que contienen puntos singulares. Para tratar matemáticamente este tipo de funciones o funcionales se hace necesario introducir procesos de regularización. En el presente artículo se analiza el proceso de regularización de funciones singulares con funciones generalizadas y se compara la integridad de la función antes y después de la regularización.

Abstract

In physics and mathematics, there are idealized concepts exist, such as the density of a material point, the point density, the intensity of an instantaneous source, etc., These are necessary for real engineering and physical problems. Treating this type of concepts correctly is done with the theory of generalized functions, it´s properties are outside the framework of the properties of conventional functions. The concept of generalized function is a generalization of the conventional concept of function and encompasses functions that contain singular points. In order to mathematically treat this type of functions or functions, it is necessary to introduce regularization processes. In this article we analyze the process of regularization of singular functions with generalized functions and compare the integrity of the function before and after the regularization.

Keywords: Generalized functions, distributions, regularization, information

1. Introducción

La regularización de funciones por medio de funciones generalizadas es un elemento que aparece en la teoría de funciones generalizadas, consiste en hacer corresponder a cada función que se va a regularizar, una función fe(x)= (f(y),w(x-y)). Debido a los puntos singulares que presentan algunas funciones generalizadas, esta regularización consiste principalmente en obviar dichos puntos y tratar la función fuera de ellos, lo que da la impresión de modificación de la función inicial o pérdida de la información, es decir que la función nueva regularizada no es totalmente la función original.

La teoría de las funciones generalizadas es una parte importante del análisis que extiende el concepto de una función a los funcionales lineales continuos que actúan sobre un espacio determinado de funciones básicas.

El concepto de función generalizada se ha desarrollado gracias a la física matemática y

Surgió para darle un sentido matemático claro a modelos usados en la Física, y nace precisamente en 1930 al introducir Dirac la función delta que lleva su mismo nombre. Luego, los fundamentos de la teoría de funciones generalizadas se desarrollan por Sóboliev (1936) y Schwarz (1951).

Las funciones generalizadas surgen, de manera natural, primero, al intentar extender los métodos e ideas del cálculo diferencial e integral clásico de inicios del siglo XIX a funciones que, formalmente, no son ni diferenciables, ni integrables y, segundo, por la necesidad de estudiar soluciones no suaves de ecuaciones diferenciales.[1]

2. Regularización con Funciones Generalizadas

La regularización de funciones generalizadas es el proceso por el cual una distribución es construida sobre de una función que tiene una singularidad, la cual la convierte en una función divergente, es decir, no es localmente integrable. La función se redefine de tal manera que la singularidad se anula, lo cual permite converger la integral, es un tema de suma importancia, no sólo del punto de vista matemático, sino también de la perspectiva matemática de la física.

Análisis de La regularización de la función inversa mediante la función delta

La regularización está dada por la siguiente expresión:

$$(f,\delta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx=\begin{cases} f(a), x=a \\ 0, x\neq a \end{cases}$$

La cual corresponde a la definición de la función delta:

$$(f,\delta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx=f(a)$$

Donde el punto a debe ser diferente de la singularidad.

Como se muestra en la figura, el proceso de regularización "elimina" los puntos en donde la función diverge.

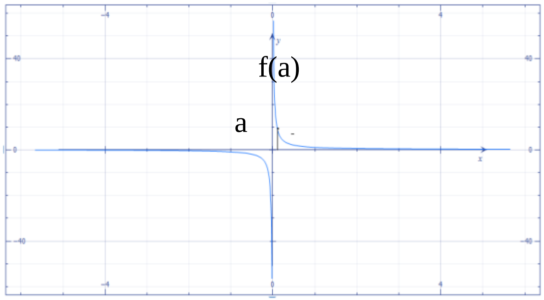

Figura 1

La función regularizada no muestra singularidades

El dominio de la función regularizada es:

$$Df=R$$

El rango de la función regularizada es

$$Rf=\left\{0,\frac{1}{a}\right\}$$

La función regularizada es continua en todos sus puntos, excepto en x=a

La derivada de la función regularizada existe en todo el dominio.

La integral de la función regularizada es convergente diferente de cero.

Análisis de la función continua a tramos

Sea la función f(x) definida de tal forma que es continua a trozos con derivada en estos trozos y con discontinuidades en x1, x2, x3, …, xk, dadas por saltos h1, h2, h3…hk

Esta función es continua en todos los puntos, excepto en los puntos x1, x2, x3, …, xk, en estos puntos la función presenta saltos en h1, h2, h3…hk, la derivada f´(x) está definida en todas partes, excepto en las discontinuidades.

La Figura de la función es:[2]

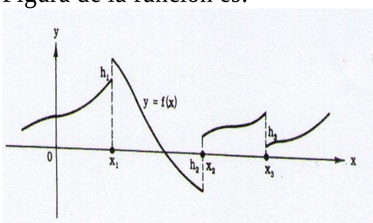

Figura 2

[1] MARIN J. Teoría Funciones Generalizadas 2014

[2] GELFAN I, SILOV G. Generalized Functions

Evidentemente la función no muestra singularidades, pero sí discontinuidades en $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$

El dominio de la función es:
$Df = R - \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

El rango de la función es:
$Rf = [a,b]$, donde a es el máximo valor de la función $f(x)$ y b es el mínimo

Como la función no es continua en $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$,
La derivada de la función se indetermina en estos puntos.

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge a la suma de las áreas bajo la curva de los trazos.

La regularización de la función se hace el siguiente procedimiento:

$$f_k(x) = f(x) - \sum_k h_k \Theta(x - x_k)$$

donde

$$\Theta(x - x_k) = \begin{cases} 1, x = x_k \\ 1, x \neq x_k \end{cases}$$

La función regularizada coincide en todos los puntos con la función f(x), excepto en los puntos de las singularidades, los cuales se ilustran en la figura 3.

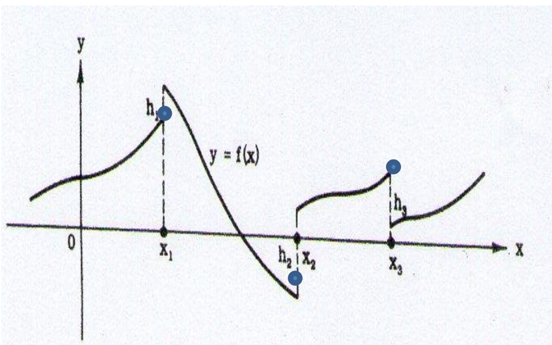

Figura 3

La función regularizada no muestra singularidades, muestra discontinuidades en x1, x2, x3, …, ahora existe un único valor para f(x1), f(x2), f(x3), …

El dominio de la función regularizada es
$Df = R$

El rango de la función regularizada es
$Rf = [a,b]$,
donde a es el máximo valor de la función f(x) y b es el mínimo.

La función regularizada es continua en todos sus puntos, excepto en x1, x2, x3, …

La derivada de la función regularizada existe en todo el dominio, excepto en x1, x2, x3, …. ya que

$$d(f_k) = d(f) - d\left(\sum_k h_k \Theta(x - x_k)\right)$$

$$f'_k = f' - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)dx$ converge a la suma de las áreas bajo la curva de los trazos y su valor converge al valor de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Análisis de la regularización de la función inversa mediante la función escalón

Sea la función:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

La Figura de la función es:

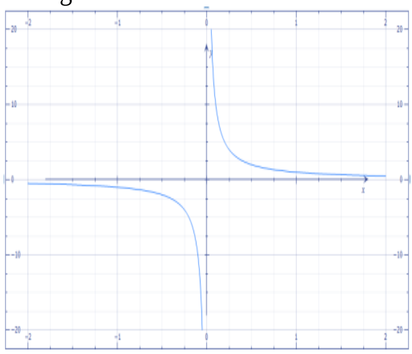

Figura 4

El dominio de la función es:
$Df = R - \{0\}$

El rango de la función es:
$Rf = R - \{0\}$

La función no es continua $x = 0$ en

La derivada de la función se indetermina en $x = 0$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ diverge pero analizando la forma de la Figura se puede concluir que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \to 0$

La regularización de la función debe acotar un intervalo en el cual no esté la singularidad, para ello se hace el siguiente procedimiento:

$$(f,\varphi) = f(x)\varphi(x) \quad ,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, x \notin [a,b] \end{cases}$$

La función regularizada no muestra singularidades.
El dominio de la función regularizada es

$$Df = R$$

El rango de la función regularizada es

$$Rf = [f(b), f(a)] \cup \{0\}$$

La función regularizada es continua en todos sus puntos, excepto en

$$f(a) \wedge f(b)$$

La derivada de la función regularizada existe en todo el dominio.
La integral de la función regularizada es convergente diferente de cero.

3. Conclusiones

1. La regularización de una función puede ser definida de diferentes formas. La regularización de una función $f(x)$ es una distribución lineal y continua que coincide con $f(x)$ en todos los puntos excepto en el punto de la singularidad.
2. En funciones con singularidades, generalmente se regularizan para tratar estas singularidades, Existe un cambio mínimo de la información, porque la función solo se modifica en un punto.
3. El dominio y el rango de la función se modifica cuando se aplica la regularización.
4. La continuidad de una función varía dependiendo del tipo de regularización aplicada.
5. La derivada de una función con singularidades no existe en estas

singularidades, cuando se aplica la regularización la derivada si existe.

6. La integral de funciones discontinuas diverge, cuando se aplica la regularización, la integral diverge.

4. Referencias Bibliográficas

Beilinson A. A. And Becerra A. R. (2001). *VestnikRUDN 9(1), 51,.*

Beilinson A. A. And becerra a. R. (2002). *VestnikRUDN 10(1), 69.*

Benedetto, Jj (1997), *Análisis Armónico y Aplicaciones* , CRC Press .

Bogoliubov n. And shirkov d. (2001) *Introduction to quantyzed field. theory*, Moscow, Nauka Press.

Edwars, R**. (**1969). *Functional Analysis, theory and appliations*, New York.

Estrada, r. Kanwal, r. P**.** (1985). *Regularization and distributional derivatives*. London.

Fisher, B**.** (1987). *Neutrices and distributions, complex Analysis and applications*, Sofia.

Gårding, l. (1997). *Algunos Puntos De Análisis Y Su Historia*, American Mathematical Society .

Gel'fandi.m., shilov g. E. (1994). *Generalized Functions, Properties and operations*, Academic Press Incorporation, New York And London,.

Gel'fandi.m., shilov g. E. (1998). *Análisis Matemático, Segundo Curso Especial*, Editorial Nauka, segunda edición.

Gel'fandi.m.,shilov g. E. (1994). *Spaces of Fundamentaland Generalized Functions,* Academic Press Incorporation, New York And London.

Gel'fandi.m.,shilov g. E., (1958) *Spaces of test and generalized functions*, Moscú.

Gelfand i. M. And shilov g. E. (1985) *Generalized Functions vol 1, 4*. Moscow: Fismatguis Press.

Grubb**,** G. (2009). *Distribuciones y operadores* , Springer .

Hormander l. (1963). *Linear partial differential operators*, Berlin.

Hörmander, l. (1983). *El análisis de los operadores diferenciales parciales lineales I* , Grundl. Mates. Wissenschaft. 256 , Springer, ISBN 3-540-12104-8 , MR 0.717.035 .

Kolmogorov, An ; Fomin, SV. (1957). *Elementos de la teoría de las funciones y el análisis funcional*, Dover Books .

Lovaine j. (1959). *CalculSymbolique, distributions and pseudofunctions*, Paris.

Marín Antuña J, (1997). *Métodos Matemáticos de la Física ENPES*, la Habana, Cuba.

Marín Antuña J, (2004). *Teoría de Funciones de Variable Completa*. Editorial "Pueblo y Educación", Cuba, 1990, tercera edición.

Neldjkov, Marko. Ogrisovic, Zorana, (1992). *A Note On The Regularization Of Distributions.* Universidad NovomSadu, Yugoeslavia.

Niño Rodríguez, Rafael Antonio**,** (1986) *Funciones Generalizadas*, Trabajo de Pregado Física, Universidad de Pamplona.

Rudin, W. (1991), *Análisis Funcional (2ª ed.)*, McGraw-Hill, ISBN 0-07-054236-8.

Ramírez AL, Gil J, Medina MH, Cruz B. (2016). Implementación en entorno Labview de un sistema multifuncional de medidas magnetoópticas y magnetoeléctricas para caracterización de materiales. BISTUA Revista de la Facultad de Ciencias Básicas, 14 (2): 116-125. doi: https://doi.org/10.24054/01204211.v2.n2.2016.2188

Schaefer, Helmuth H . Wolff, MP (1999). *Espacios vectoriales topológicos*. GTM 3 . Nueva York: Springer- Verlag . ISBN 9780387987262 .

Schwartz, L. (1951), *Théorie des distribuciones* 1-2 , Hermann .Schwartz, L. (1954), *"Sur l'impossibilité de la multiplicaciones des distribuciones"*, CRAcad. Sci. París 239 : 847-848 .

Sobolev, Sl (1936), *"Méthode nouvelle à résoudre Le problème de Cauchy pour les ecuaciones linéaires hyperboliques Normales"* , Mat. Sbornik 1 : 39-72

Stein, Elías ; Weiss, Guido (1971), *Introducción al análisis de Fourier en Espacios euclídeos* , Princeton University Press, ISBN 0-691-08078-X .

Strichartz, r. *(1994), Una guía para la teoría de la distribución y transformadas de Fourier*, CRC Press, ISBN 0-8493-8273-4 .

Trèves, François (1967), *topológicas espacios vectoriales*, Distribuciones y almendras , Academic Press, pp. 126 y ss .

Vladimirov, v. V. (1998). *Ecuaciones de la Física Matemática*, Editorial Nauka Moscú.

*Para citar este artículo: Niño Rodríguez R.A., Becerra Becerra.A.R.. On the regularization problem with functions generalized. Revista Bistua.2019.17(2):234 238.

+ Autor para el envió de correspondencia y la solicitud de las separatas : Becerra Becerra.A.R. Facultad de Ciencias Basicas. Departamento de Física y Geolog´ıa. Universidad de Pamplona, Grupo de investigació n INTEGRAR Pamplona,Colombia. email: arik@fisica.ru

Recibido: Septiembre 20 de 2018

Aceptado: Enero 29 de 2019