



Cálculo del potencial de Bohm a partir de la solución de la ecuación de

Ermakov

Calculation of the Bohm potential from the solution of the Ermakov equation

Jairo Alonso Mendoza S.^a; Juan Carlos López C.^b; Rosalba Mendoza Suárez^b

^a Universidad de Pamplona, Departamento de Física-Geología, Colombia.

^b Universidad de Pamplona, Departamento de Matemáticas, Colombia.

Correspondencia: jairoam@unipamplona.edu.co

Recibido: Octubre 25, 2022. Aceptado: Abril 21, 2023. Publicado: Junio 10, 2023

Resumen

Usando el formalismo de Madelung-Bohm de la mecánica cuántica y teniendo en cuenta la relación con la ecuación de Ermakov, en el presente trabajo solucionamos en forma general la ecuación de Ermakov y presentamos aplicaciones relacionadas con el oscilador armónico simple tomando un potencial dependiente del tiempo, en el cual se calculan los potenciales de Bohm para cada ejemplo dado.

Palabras clave: Potencial de Bohm; Ecuación de Ermakov; Formulación de Madelung; Hidrodinámica cuántica.

Abstract:

Using the Madelung-Bohm formalism of quantum mechanics and taking into account the relationship with the Ermakov equation, in this work we solve the Ermakov equation in a general form and present applications related to the simple harmonic oscillator with a time-dependent potential, where we calculate the Bohm potentials for each given example.

Keywords: Bohm potential; Ermakov equation; Madelung formulation; Quantum hydrodynamics.

1. Introducción

En este trabajo presentamos el cálculo del potencial de Bohm a partir de la relación encontrada con la ecuación de Ermakov, se parte de la formulación de Madelung de la mecánica cuántica, recordando que las ecuaciones de Madelung [1], o las ecuaciones de la hidrodinámica cuántica, son la formulación alternativa equivalente de Erwin Madelung de la ecuación de Schrödinger, escrita en términos de variables hidrodinámicas, similar a las ecuaciones de dinámica de fluidos de Navier-Stokes [2, 3, 4]. La derivación de las ecuaciones de Madelung es similar a la formulación de De Broglie-Bohm, que representa la ecuación de Schrödinger como una ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi [5, 6, 7, 8, 9, 10].

Para el estudio tomamos como base el oscilador armónico dependiente del tiempo, este es uno de los temas mas relevantes en la mecánica cuántica, debido a la relevancia que tiene en el moldeamiento de sistemas reales, su relevancia esta mas que definida en las diferentes ramas de la mecánica cuántica, la solución al oscilador dependiente del tiempo se ha presentado en la literatura de diferentes formas, se hace un tratamiento de la mecánica clásica a la mecánica cuántica en [11], o en funciones

de Green como en [12].

Se ha usado en el desarrollo algebraico el operador evolución, que fue presentado como opción de solución a la ecuación de Schrödinger en [13], se ha solucionado en diferentes escenarios y desarrollando aplicaciones a diversos sistemas físicos.

En el presente trabajo usamos el formalismo de operadores (en particular el operador momento) análogo a [14] la contribución se basa en el desarrollo más profundo y general del problema, se inicia el desarrollo presentando el enfoque unidimensional de Madelung-Bohm, luego se introduce el formalismo de operadores, en esta sección aparece la relación con la ecuación de Ermakov; el principal aporte del trabajo se desglosa en la sección (4.), donde se presenta en detalle una solución general a la ecuación, luego se presentan dos ejemplos en detalle para el cálculo del potencial de Bohm, primero un potencial independiente del tiempo y seguido uno dependiente del tiempo; finalmente se presentan las conclusiones obtenidas.

2. Enfoque unidimensional de Madelung-Bohm

Partiendo de la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, la ecuación de Schrödinger, y considerando el sistema en una dimensión con un potencial unidimensional $V(x, t)$ se tiene (por

simplicidad se asume en este trabajo que $\hbar = 1$)

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x, t) \psi(x, t), \quad (1)$$

con $\psi(x, t)$ la función de onda del sistema mecánico cuántico. Tomando la descomposición polar de la función de onda [15, 16, 17]

$$\psi(x, t) = A(x, t) e^{iS(x, t)}, \quad (2)$$

con $A(x, t)$ y $S(x, t)$ funciones reales que dependen de la posición y del tiempo, separando la parte real e imaginaria al sustituir (2) en (1) se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\vec{\nabla} S)^2 + V - \frac{1}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial A^2}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(A^2 \frac{\vec{\nabla} S}{m} \right) = 0, \quad (4)$$

la ecuación (3) corresponde a la ecuación cuántica de Hamilton-Jacobi, la cual es similar a la contraparte clásica, y la ecuación (4) es la ecuación de continuidad, (que garantiza la conservación de la probabilidad), en la ecuación (3) la expresión

$$V_B = -\frac{1}{2m} \frac{\nabla^2 A}{A} \quad (5)$$

es el denominado potencial de Bohm [18, 7]. A las ecuaciones (3) y (4) con la definición (5) se les conoce en la literatura como el enfoque unidimensional de Madelung-Bohm.

3. Enfoque del operador para la solución de la ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad (4) se puede reescribir como una ecuación similar a la de Schrödinger

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \left(2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} A \right), \quad (6)$$

usando el operador de cantidad de movimiento $\hat{p} = -i \frac{\partial}{\partial x}$, la ecuación (6) se puede escribir de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2m} \left(2 \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) A, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= -\frac{1}{2m} \left(2i \frac{\partial S}{\partial x} \hat{p} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) A. \end{aligned} \quad (7)$$

Escogiendo la fase de la función de onda de la forma:

$$S(x, t) = Q(x) \frac{d\nu(t)}{dt} + \mu(t), \quad (8)$$

$$\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} = \frac{dQ(x)}{dx} \frac{d\nu(t)}{dt}, \quad (9)$$

reescribiendo el termino $2 \frac{\partial S}{\partial x} \hat{p}$ que aparece en la ecuación (7) se tiene

$$2 \frac{\partial S}{\partial x} \hat{p} = \frac{d\nu(t)}{dt} \left(\frac{dQ(x)}{dx} \hat{p} + \frac{dQ(x)}{dx} \hat{p} \right), \quad (10)$$

usando la propiedad del conmutador $[f(x), \hat{p}] = i f'(x)$, es posible escribir la ecuación (7) de la forma

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{i}{2m} \frac{d\nu(t)}{dt} \left(\frac{dQ}{dx} \hat{p} + \hat{p} \frac{dQ}{dx} \right) A, \quad (11)$$

La ecuación (11) tiene como solución

$$A(x, t) = \exp \left\{ -\frac{i}{2m} \int \frac{d\nu(t)}{dt} dt \left(\frac{dQ}{dx} \hat{p} + \hat{p} \frac{dQ}{dx} \right) \right\} A_0(x), \quad (12)$$

donde $A_0(x) = A_0(x, t = 0)$, esta condición inicial es arbitraria (cuadráticamente integrable), es la función de posición. Tomando la función $Q(x) = x^2/2$ y $m = 1$, la solución (12) toma la forma [14].

$$A(x, t) = \exp \left[-i \frac{\nu(t)}{2} (x\hat{p} + \hat{p}x) \right] A_0(x). \quad (13)$$

En la anterior ecuación, el operador $\exp \left[-i \frac{\nu(t)}{2} (x\hat{p} + \hat{p}x) \right]$ es denominado el operador de compresión [19, 20]. Ahora escogiendo como condición inicial $A_0 = \pi^{-1/4} \exp(-x^2/2)$,

$$A(x, t) = \frac{1}{\pi^{-1/4}} \exp \left[-\frac{x^2}{2} e^{2\nu(t)} - \frac{\nu(t)}{2} \right], \quad (14)$$

El potencial de Bohm definido en la ecuación (5) toma la forma

$$V_B(x, t) = -\frac{x^2}{2} \exp[-4\nu(t)] + \frac{1}{2} \exp[-2\nu(t)] \quad (15)$$

Ahora tomando $\frac{d\nu(t)}{dt} = -\frac{e^{-2\nu(t)}}{2}$, se obtiene de la ecuación (3)

$$V + \frac{x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 - e^{-4\nu} \right) = 0; \quad (16)$$

realizando el cambio de variable $\rho = e^\nu$; $\frac{\partial \nu}{\partial t} = -\frac{1}{2\rho^2}$; $\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = \frac{1}{2} (\rho \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - (\frac{\partial \rho}{\partial t})^2)$, se llega a:

$$V_B + \frac{x^2}{2\rho} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho^3} \right) = 0. \quad (17)$$

Si ρ obedece a la ecuación Ermakov

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \Omega^2(t) \rho = \frac{1}{\rho^3}, \quad (18)$$

$\Omega(t)$ representa la frecuencia dependiente del tiempo, y finalmente el potencial para el oscilador armónico dependiente del tiempo toma la forma

$$V_B(x, t) = \frac{\Omega^2(t)}{2} x^2, \quad (19)$$

la función de onda para el potencial encontrado en la ecuación (19) y las condiciones definidas a partir de las ecuaciones (2), (14) y (17) se obtiene

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} e^{-2\nu(t)} - \frac{\nu(t)}{2} \right. \\ &\quad \left. + i \left[\frac{x^2}{2} \frac{\partial \nu(t)}{\partial t} + \mu(t) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

4. Solución a la ecuación de Ermakov

Si en la ecuación (18), $\omega(t)$ es una solución de la ecuación homogénea asociada; es decir,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + \Omega^2(t)\omega = 0, \quad (21)$$

considerando los cambios de variable

$$\rho = z \omega(t), \quad (22)$$

$$\xi = \int \frac{1}{\omega^2(t)} dt, \quad (23)$$

se tiene:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dz}{dt} \omega + z \frac{d\omega}{dt} \quad (24)$$

de donde

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \omega \frac{d^2 z}{dt^2} + z \frac{d\omega}{dt} \frac{dz}{dt} + z \frac{d^2 \omega}{dt^2} \quad (25)$$

como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{d\xi} \frac{d\xi}{dt}, \quad (26)$$

usando el teorema fundamental del cálculo en la ecuación (23)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\omega^2} \quad (27)$$

por lo tanto

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d\xi}{dt}, \quad (28)$$

al derivar (28) con respecto a t , se tiene:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{2}{\omega^3} \frac{d\omega}{dt} \frac{dz}{d\xi} + \frac{1}{\omega^4} \frac{d^2 z}{d\xi^2}, \quad (29)$$

sustituyendo (28) y (29) en la ecuación (25)

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = -\frac{2}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} \frac{dz}{d\xi} + \frac{1}{\omega^3} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{2}{\omega^2} \frac{dz}{d\xi} \frac{d\omega}{dt} + z \frac{d^2 \omega}{dt^2}, \quad (30)$$

es decir,

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{1}{\omega^3} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + z \frac{d^2 \omega}{dt^2}, \quad (31)$$

despejando z de la ecuación (22), y reemplazando este valor en la ecuación (31) se obtiene,

$$\frac{d^2 \rho}{dt^2} = \frac{1}{\omega^3} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \frac{\rho}{\omega} \frac{d^2 \omega}{dt^2}, \quad (32)$$

al sustituir la ecuación (32) en (18)

$$\frac{1}{\rho^3} = \frac{1}{\omega^3} \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left(\frac{\rho}{\omega} \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \Omega^2(t)\rho \right), \quad (33)$$

en la ecuación (33) la expresión entre paréntesis, se anula debido a la ecuación (21), y usando (22), la ecuación (33) toma la forma,

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \frac{1}{z^3}. \quad (34)$$

Con el fin de resolver la ecuación (34) utilizamos la sustitución

$$\omega = \frac{dz}{d\xi} \quad (35)$$

con lo cual

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{dz}{d\xi} \right) = \frac{d\omega}{dz} \frac{dz}{d\xi} = \omega \frac{d\omega}{dz} \quad (36)$$

de esta manera la ecuación (34) se transforma en la ecuación

$$\omega \frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{z^3}, \quad (37)$$

(24) separando las variables, integrando y considerando la relación dada en (35), se obtiene

$$z = (C_1 + (\xi + C_2)^2); \quad C_1 \neq 0, \quad (38)$$

(25) finalmente teniendo en cuenta (22)

$$\rho(t) = \omega(t) \left[C_1 + \left(\int \frac{dt}{\omega^2(t)} + C_2 \right)^2 \right]^{1/2} \quad (39)$$

luego (39) es la solución general de la ecuación de Ermakov dada en (18)

5. Ejemplo 1

Considerando en la ecuación (18) la función $\Omega = \lambda$, como un caso particular en el que la función no depende del tiempo. Considerando la ecuación homogénea asociada a (18) se tiene;

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \lambda^2 \rho = 0, \quad (40)$$

donde $\omega(t) = \cos(\lambda t)$; la cual es una solución particular; de acuerdo a (39) la solución de la ecuación no homogénea queda

$$\rho(t) = \cos(\lambda t) \left[C_1 + \left(\frac{\tan(\lambda t)}{\lambda} + C_2 \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (41)$$

tomando (sin perder generalidad) $C_2 = 0$; $C_1 = 1$ se tiene

$$\rho(t) = \left(\cos^2(\lambda t) + \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^2} \right)^{1/2}, \quad (42)$$

lo que permite encontrar la función $\nu(t)$ de la forma

$$\nu(t) = \ln \left(\cos^2(\lambda t) + \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^2} \right)^{1/2}, \quad (43)$$

al sustituir en la ecuación (15) se encuentra el potencial de Bohm dado por

$$V_B(x, t) = -\frac{x^2}{2} \left(\cos^2(\lambda t) + \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^2} \right)^{-2} + \frac{1}{2} \left(\cos^2(\lambda t) + \frac{\sin^2(\lambda t)}{\lambda^2} \right)^{-1} \quad (44)$$

Para analizar el comportamiento de este potencial en la Figura 1 se observa el cambio del potencial V_B en función de la posición x y el tiempo t , para obtener esta figura se tomo $\lambda = 1$,

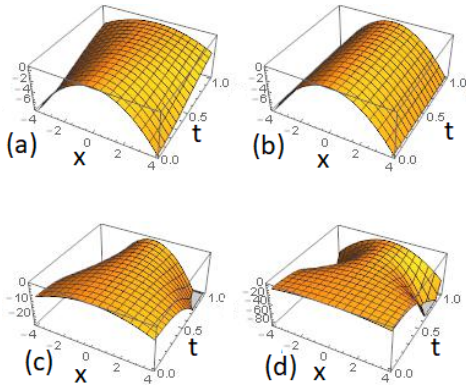


Figura 1: Potencial de Bohm ecuación (44) tomando los valores de λ . (a) 0,5; (b) 1; (c) 1,5; (d) 2.

6. Ejemplo 2

Considerando una frecuencia dependiente del tiempo de la forma

$$\Omega(t) = \frac{1}{a + bt} \tag{45}$$

Dependiendo del valor que asume b , consideramos las siguientes situaciones

6.1 Caso $0 < b < 2$

Teniendo en cuenta que no es sencillo encontrar para este caso una solución particular de la ecuación homogénea asociada a la ecuación de Ermakov, que nos permita aplicar la formula (39), asumimos una solución de (18) de la forma $\rho(t) = A(a + bt)^\alpha$, donde A y α son constantes a determinar, con $A \neq 0$.

$$\rho'(t) = Aab(a + bt)^{\alpha-1}; \rho''(t) = Aab^2(\alpha - 1)(a + bt)^{\alpha-2}$$

sustituyendo en la ecuación (18)

$$[A\alpha(\alpha - 1)b^2 + A](a + bt)^{\alpha-2} = (a + bt)^{-3\alpha}A^{-3}$$

luego $\alpha = 1/2$; $A = (1 - b^2/4)^{-1/4}$. La ecuación (13) tomando el valor de $\rho(0) = 1$, da como resultado $A = \sqrt{1 - b^2/4}$ llegando a la función

$$\nu(t) = -\frac{1}{4} \ln \left(1 - \frac{b^2}{4} \right) + \frac{1}{2} \ln \left[\left(1 - \frac{b^2}{4} \right)^{1/2} + bt \right]. \tag{46}$$

lo que corresponde a un potencial de Bohm dado por:

$$V_B(x, t) = -\frac{1 - b^2/4}{2(a + bt)^2} x^2 + \frac{\sqrt{1 - b^2/4}}{2(a + bt)}, \tag{47}$$

este potencial está bien definido, sin singularidades. El potencial de Bohm exhibe el mismo comportamiento cualitativo para todos los valores del parámetro b en el intervalo $(0; 2)$.

Si siguiendo la idea del caso anterior, se busca una solución $\omega(t)$ de la ecuación homogénea

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{1}{(a + bt)^2}\rho = 0$$

de la forma $\omega(t) = (a + bt)^\alpha$, obteniendo

$$\alpha = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2b} \tag{48}$$

6.2 Caso $b = 2$

De la expresión (48), si $b = 2$, se obtiene $\alpha = 1/2$, luego $\omega(t) = (a + bt)^{1/2}$.

Así la solución de la ecuación de Ermakov, para la frecuencia $\Omega(t) = 1/(a + 2t)$, se encuentra utilizando la ecuación (39).

$$\rho(t) = \sqrt{a + 2t} \left[C_1 + \left(\frac{1}{2} \ln(a + 2t) + C_2 \right)^2 \right]^{1/2},$$

tomando $C_2 = 0$, $C_1 = 1$

$$\rho(t) = \sqrt{a + 2t} \left[1 + \frac{1}{4} \ln^2(a + 2t) \right], \tag{49}$$

La solución de la ecuación de Ermakov para la frecuencia elegida anteriormente da la función auxiliar

$$\rho(t) = C\sqrt{a + bt}, \tag{50}$$

donde $C = (1 - b^2/4)^{-1/4}$.

6.3 Caso $b > 2$

En este caso, una solución particular de la ecuación homogénea, $\omega(t) = (a + bt)^\alpha$ con α dada en (48), con aplicación de la relación dada en (39), la solución de (18) en este caso es

$$\rho(t) = (a + bt)^\alpha \left[C_1 + \left(\frac{(a + bt)^{1-2\alpha}}{(1 - 2\alpha)b} + C_2 \right)^2 \right]^{1/2} \tag{51}$$

tomando en la ecuación (51) $C_1 = 1$; $C_2 = 0$ se obtiene de la ecuación $\rho = e^\nu$

$$\nu(t) = \alpha \ln(a + bt) + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \left(\frac{(a + bt)^{1-2\alpha}}{(1 - 2\alpha)b} \right)^2 \right] \tag{52}$$

sustituyendo (52) en la ecuación (15) se obtiene el potencial de Bohm (donde se han tomado los valores de $a = 1, b = 3$ y $\alpha = 0,1275$) que se presenta en la Figura 2.

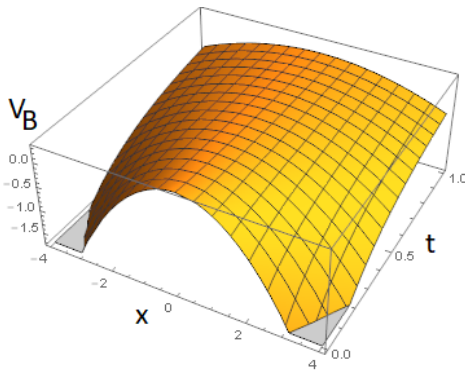


Figura 2: Potencial de Bohm (V_B) para el caso $b > 2$, se han tomado los valores de $\alpha = 0,1275$; $b = 3$; $a = 1$

7. Conclusiones

Consideramos que uno de los principales aportes del presente trabajo es mostrar explícitamente en la sección 4. un desarrollo matemático para encontrar la solución a la ecuación de Ermakov, la ecuación (39) es una solución general de la ecuación (18), lo que permite calcular mediante la ecuación $\nu(t)$, al sustituir en la ecuación (14) y mediante (5) es posible encontrar el potencial de Bohm.

El presente artículo se ha desarrollado siguiendo la línea de trabajo de [14] en donde se hace el análisis para los casos $0 < b < 2$ y $b = 2$, aquí ampliamos al caso $b > 2$, donde se halla la expresión explícita para la función $\rho(t)$ que permite usando la ecuación (15) hallar el potencial de Bohm que es nuestro objetivo, como se muestra en la sección 6.3. Se observa en la Figura 2 que el comportamiento sigue el mismo patrón dado en los casos anteriores (Figura 1), la función cuadrática predomina para valores pequeños de t y se suaviza a medida que evoluciona t .

En el artículo [21] los autores desarrollan una aproximación de Bohm al cambio de fase de Gouy, esto dentro del formalismo de Madelung-Bohm llegan a la ecuación de Ermakov, trabajan la función $\Omega(t) = 0$, en nuestro caso ampliamos esta consideración como se muestra en la sección 5., donde asumimos $\Omega(t) = \lambda$, donde λ puede tomar cualquier valor numérico, esto generaliza el desarrollo de [21] permitiendo plantear aplicaciones no solo para encontrar el cambio de fase de Gouy de una forma natural.

Reconocimientos

Los autores manifiestan su agradecimiento a la Vicerrectoría de investigaciones de la Universidad de Pamplona, por su apoyo; a los grupos de investigación Integrar y Grupo de Investigación en Matemáticas Universidad de Pamplona por los aportes al presente trabajo.

Referencias

- [1] Madelung, E. "Eine anschauliche Deutung der Gleichung von Schrödinger". *Naturwissenschaften*. 14 (45): 1004–1004. Bibcode : 1926NW 14.1004M (1926). doi: 10.1007 / BF01504657.
- [2] Achenson, D. J., *Elementary Fluid Dynamics*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, Oxford University Press,(1990), ISBN 0-19-859679-0.
- [3] Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, (1967), ISBN 0-521-66396-2.
- [4] Landau, L. D.; Lifshitz, E. M. , *Fluid mechanics*, Course of Theoretical Physics 6 (2nd revised edición), Pergamon Press, (1987), ISBN 0-08-033932-8, OCLC 15017127.
- [5] Albert, David Z. . "Bohm's Alternative to Quantum Mechanics". *Scientific American*. 270 (5): 58–67. Bibcode:1994SciAm.270e..58A.(May 1994), doi:10.1038/scientificamerican0594-58.
- [6] Barbosa, G. D.; N. Pinto-Neto . "A Bohmian Interpretation for Noncommutative Scalar Field Theory and Quantum Mechanics". *Physical Review D*. 69 (6): 065014.(2004) arXiv:hep-th/0304105. Bibcode:2004PhRvD..69f5014B. doi:10.1103/PhysRevD.69.065014. S2CID 119525006.
- [7] Bohm, David . "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden VariablesI". (1952), *Physical Review*. 85 (2): 166–179. Bibcode:1952PhRv..85..166B. doi:10.1103/PhysRev.85.166.
- [8] Bohm, David . "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden Variables", II". *Physical Review*. 85 (2): 180–193. (1952), Bibcode:1952PhRv..85..180B. doi:10.1103/PhysRev.85.180.
- [9] Bohm, David . "A new theory of the relationship of mind and matter"(PDF). *Philosophical Psychology*. 3 (2): 271–286. (1990), doi:10.1080/09515089008573004.
- [10] Bohm, David; B.J. Hiley . *The Undivided Universe: An ontological interpretation of quantum theory*. London: Routledge. (1993) ISBN 978-0-415-12185-9.
- [11] Hirota Kanasugi, Hidehiko Okada, *Systematic Treatment of General Time-Dependent Harmonic Oscillator in Classical and Quantum Mechanics*, *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 93, No.5, May 1995.
- [12] Landovitz, L. F. and Levine, A. M. and Schreiber, W. M., Time-dependent harmonic oscillators, *Phys. Rev. A*, 20,3, 1162–1168, (1979), American Physical Society, doi = 10.1103/PhysRevA.20.1162, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.20.1162>
- [13] C. M. Cheng and P. C. W. Fung, The evolution operator technique in solving the Schrodinger equation, and its application to disentangling exponential operators and solving the problem of a mass-varying harmonic oscillator. *J. Phys. A: Math. Gen.* 21 (1988) 4115-4131.
- [14] Francisco Soto-Eguibar, Felipe A. Asenjo, Sergio A. Hojman, and Héctor M. Moya-Cessa , "Bohm potential for the time dependent harmonic oscillator", *J. Math. Phys.* 62, 122103 (2021) <https://doi.org/10.1063/5.0044144>
- [15] S.A. Hojman and F.A. Asenjo, *Phys. Lett. A* 384 (2020) 126913.
- [16] R.E. Wyatt, *Quantum Dynamics with Trajectories: Introduction to Quantum Hydrodynamics*, Springer, 2005.
- [17] P.R. Holland. *The Quantum Theory of Motion: An Account of the de Broglie-Bohm Causal Interpretation of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1993.
- [18] E. Madelung, *Z. Phys.* 40 (1927) 322.
- [19] Yuen H.P. *Phys. Rev. A* 13 , 2226-2243 (1976).
- [20] Caves C.M. *Phys. Rev. D* 23, 1693-1708 (1981).
- [21] Héctor M. Moya-Cessa, Sergio A. Hojman, Felipe A. Asenjo, Francisco Soto-Eguibar, Bohm approach to the Gouy phase shift, *Optik*, Volume 252, 2022, 168468, ISSN 0030-4026, <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2021.168468>.