REVISTAS CIENTÍFICAS INDEXADAS
BISTUA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS - UNIVERSIDAD DE PAMPLONA
fcb Facultad de Ciencias Básicas Universidad de Pamplona

***BISTUA**, Vol.24 (1) (2026). Pamplona-Colombia.*
*https://doi.org/10.24054/bistua.v24i1.4677*

# ¿Una inconsistencia en la ilustración de la versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo de Isaac Barrow?

***An inconsistency in the illustration of the geometric version of Isaac Barrow's Fundamental Theorem of Calculus?***

**Saulo Mosquera López**

*Grupo de investigación GESCAS, Universidad de Nariño, San Juan de Pasto, Nariño, Colombia; mail: saulo.mosquera@gmail.com*

***Corresponding author:*** *saulo.mosquerah@gmail.com*

***Periodo de Publicación:*** *Enero-Junio, 2026*

**Resumen**

El teorema fundamental del Cálculo (TFC) surge en el siglo XVII al percatarse de la relación existente entre los problemas de las tangentes y las cuadraturas, es decir, del vínculo entre el problema de encontrar la tangente a una curva en un punto y el de hallar el área bajo una curva. Aunque fueron finalmente I. Newton y G. W. Leibniz quienes formalizaron la determinante relación inversa entre el problema de las tangentes y el problema de las cuadraturas, un profesor de Newton, I. Barrow, percibió una interesante correspondencia geométrica entre estos dos problemas que puede considerarse una versión del TFC. El objetivo de este documento es mostrar esta relación, interpretarla como el resultado moderno que conocemos como el TFC, ilustrarla utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra y analizar una inconsistencia en el diagrama que ilustra la demostración de Barrow. Finalmente, presentar orientaciones didácticas para la enseñanza del cálculo que articulen el razonamiento geométrico euclidiano, la transición entre la notación histórica y la moderna, y la exploración gráfica mediante herramientas tecnológicas.

***Palabras clave:*** Tangente, cuadratura, cálculo, teorema fundamental del cálculo, inconsistencia.

**Abstract:**

The Fundamental Theorem of Calculus (FTC) emerged in the 17th century upon recognizing the relationship between the problems of tangents and quadratures that is, the link between finding the tangent to a curve at a point and finding the area under a curve. Although it was ultimately I. Newton and G. W. Leibniz who formalized the decisive inverse relationship between the tangent and quadrature problems, Newton's teacher, I. Barrow, perceived an intriguing geometric correspondence between these two problems that can be considered a version of the FTC. The aim of this paper is to present this relationship, interpret it as the modern result known as the FTC, illustrate it using the dynamic geometry software GeoGebra, and analyze an inconsistency in the diagram depicting Barrow's proof of this relationship. Finally, didactic guidelines for teaching calculus are presented, articulating Euclidean geometric reasoning, the transition between historical and modern notation, and graphical exploration through technological tools.

***Keywords:*** Tangent, quadrature, calculus, fundamental theorem of calculus, inconsistency.

## 1 Introducción

El origen del cálculo se fundamenta esencialmente en el desarrollo de técnicas para tratar cuatro problemas, planteados entre los Siglos XV y XVII, (ver [1]):

- Hallar la tangente a una curva en un punto.
- Encontrar el valor máximo o mínimo de una función.
- Determinar la longitud de una curva, el área de una región y el volumen de un sólido.
- Dada una fórmula para la distancia recorrida por un cuerpo en cualquier tiempo, encontrar la velocidad y la aceleración del cuerpo en un instante dado e, inversamente, dada la fórmula para la aceleración como una función del tiempo encontrar la velocidad y la distancia recorrida.

Aunque algunos de estos problemas fueron considerados por los antiguos griegos (Demócrito, Eudoxo de Cnido, Arquímedes) fue entre los Siglos XV y XVII cuando estos, fueron analizados nuevamente por: Cavalieri, Fermat, Descartes, Wallis, Gregory, Barrow. Sus trabajos fueron el fundamento para que I, Newton y G. W. Leibniz, de manera independiente, lograran sintetizar los métodos infinitesimales considerados por sus antecesores, en dos conceptos fundamentales: derivada e integral. Así mismo, mostraron que estos conceptos eran inversos, en lo que actualmente se conoce como el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC).
Entre los predecesores del cálculo, merece una mención

 © *Author; License Universidad de Pamplona*

especial Isaac Barrow quien, entre los matemáticos que se aproximaron a esta disciplina, es considerado el que más cerca estuvo de su descubrimiento (ver [2]). Esto se debe a que estuvo muy próximo a "descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación" (ver [3, p. 508]).

I. Barrow (1630 -1677) fue un teólogo inglés, profesor de matemáticas en Cambridge, quien entre 1662 y 1670 ocupó la cátedra Lucasiana de geometría. Esta cátedra la cedió en beneficio de su alumno Isaac Newton en el año de 1669 para continuar sus estudios de teología. El pensamiento de Barrow (Figura 1) fue eminentemente geométrico y por ello su trabajo se orientó hacia esta área de las matemáticas, editó los trabajos de Euclides, Apolonio y Arquímedes, y entre sus principales obras se pueden considerar Lectiones opticae (1669) y Lectiones Geometricae (1670), trabajo en el cual colaboró I. Newton (ver [4]).

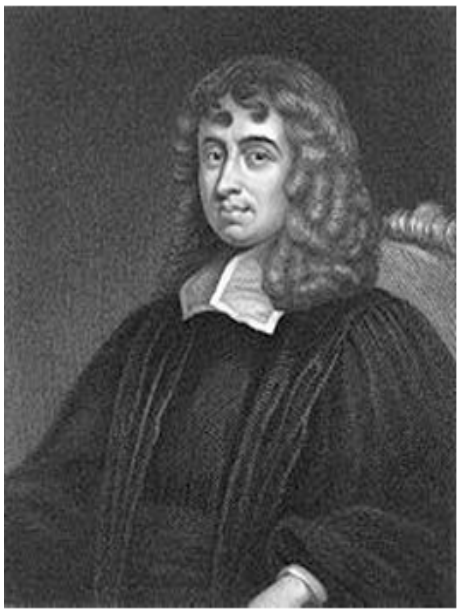
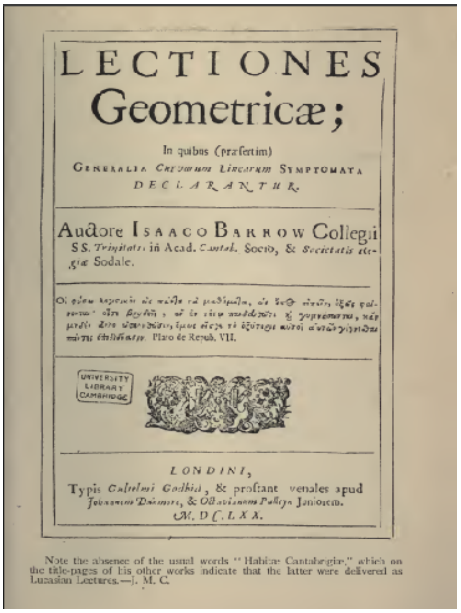


Figura 1: Una imagen de I. Barrow. Fuente: Archive Photos/Getty Images.

En sus lecciones de geometría, Barrow presentó dos demostraciones geométricas del TFC: la primera en la Proposición XI (Lección X) y la segunda en la Proposición XIX (Lección XI) [5–7]. En este documento se analiza la primera de estas demostraciones, se presenta su modelación en el software de geometría dinámica GeoGebra, se examina una probable inconsistencia en el diagrama que la ilustra y, finalmente se discuten las implicaciones y aplicaciones didácticas derivadas de este enfoque histórico-computacional.

## 2 La versión geométrica del TFC de Isaac Barrow

Las Lectiones Geometricae, cuya portada se muestra en la Figura 2, constan de 13 lecciones que tratan fundamentalmente proposiciones relacionadas con el cálculo de tangentes, áreas y longitudes de arcos ( [6]).



LECTIONES
Geometricæ;

In quibus (præfertim)
GENERALIA CURVARUM LINEARUM SYMPTOMATA
DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW Collegii
SS. Trinitatis in Acad. Cantab. Socio, & Societatis Regiæ Sodale.

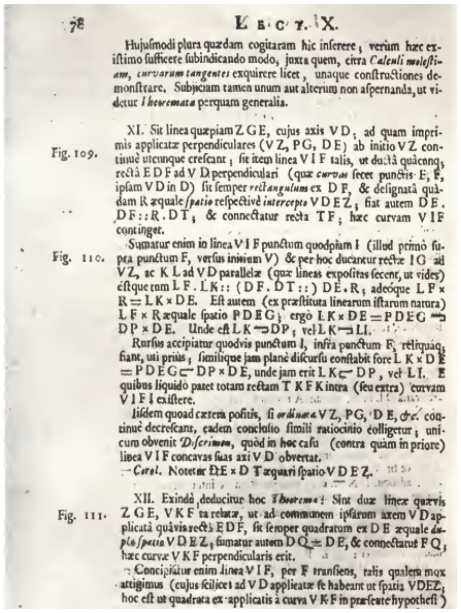
Plato de Repub. VII.

LONDINI,
Typis Gulielmi Godbid, & prostant venales apud Johannem Dunmore, & Obadiahum Pullyn Juniorem.
M. DC. LXX.

Note the absence of the usual words "Habitæ Cantabrigiæ," which on the title-pages of his other works indicate that the latter were delivered as Lucasian Lectures.—J. M. C.

Figura 2: La portada de las Lectiones Geometricae, [5]

En este texto, la Lección X considera la Proposición XI, la cual corresponde a una versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo; una imagen de su versión original se ilustra en la Figura 3. En esta sección se analiza la demostración de dicha proposición, la cual sigue los lineamientos de la presentada por [5]; sin embargo, en ella se han modificado algunos detalles para adaptarlos a una notación más actual.



LECTIO X.

Hujusmodi plura quædam cogitaram hic inferere, verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unaque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

Fig. 109. XI. Sit linea quæpiam ZGE, cujus axis VD; ad quam imprimis applicatæ perpendiculares (VZ, PG, DE) ab initio VZ continuè utcunque crescant; sit item linea VIF talis, ut ductâ quâcunq; rectâ EDF ad VD perpendiculari (quæ *curvam* secet punctis E, F, ipsam VD in D) sit semper *rectangulum* ex DF, & designatâ quâdam R æquale *spatio* respectivè *intercepto* VDEZ; fiat autem DE. DF :: R. DT, & connectatur recta TF; hæc curvam VIF continget.

Fig. 110. Sumatur enim in linea VIF punctum quodpiam I (illud primò supra punctum F, versus initium V) & per hoc ducatur recta IG ad VZ, ac KL ad VD parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) estque tam LF. LK :: (DF. DT ::) DE. R; adeoque LF × R = LK × DE. Est autem (ex præstituta linearum istarum natura) LF × R æquale spatio PDEG; ergò LK × DE = PDEG − DP × DE, unde est LK − DP, vel LK − LI. E quibus liquidò patet totam rectam TKFK intra (seu extra) curvam VIFI existere.

*Iisdem* quoad cætera positis, si *ordinatæ* VZ, PG, DE, *&c.* continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Discrimen*, quòd in hoc casu (contra quam in priore) linea VIF concavas suas axi VD obvertat.

*Corol.* Notetur DE × DT æquari spatio VDEZ.

Fig. 111. XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis ZGE, VKF tactu relatæ, ut ad communem ipsarum axem VD applicatâ quâvis rectâ EDF, sit semper quadratum ex DE æquale *duplo spatio* VDEZ, sumatur autem DQ = DE, & connectatur FQ, hæc curvæ VKF perpendicularis erit.

Concipiatur enim linea VIF, per F transiens, talis qualem modò assignavimus (cujus scilicet ad VD applicatæ ita habeant ut spatia VDEZ, hoc est ut quadrata ex applicatis à curva VKF in præsente hypothesi)

Figura 3: La Proposición XI de la Lección X, [5]

Sea $ZGE$ una curva cuyo eje es $VD$ y consideremos las ordenadas $VZ$, $PG$ y $DE$ perpendiculares a este eje las cuales crecen continuamente desde la ordenada inicial $VZ$ como ilustra la Figura 4; sea $VIF$ una curva tal que si una línea recta $EDF$ se traza perpendicular al eje $VD$, que corta a las curvas en los puntos $E, F$ y a $VD$ en $D$, el rectángulo determinado por $DF$ y una longitud dada $R$ es igual al área de la región

$VDEZ$; sea $T$ un punto sobre $VD$ talque

$$\frac{DF}{TD} = DE$$

y únase $T$ con $F$ entonces $TF$ toca a la curva $VIF$, [5–7].

*Proof.* **(La demostración de Barrow)** Se debe demostrar que la recta $TF$ es la tangente a la curva $VIF$ en el punto $F$, para lo cual se demuestra que la distancia horizontal $KL$, de cualquier punto $L$ de la recta $EF$ a la recta $FT$, es menor que la distancia $IL$ de dicho punto $L$ a la curva $VIF$ ya esto prueba que cuando $I$ está a la izquierda de $F$ la recta $FT$ queda siempre por debajo de la curva $VIF$. Veamos esto.

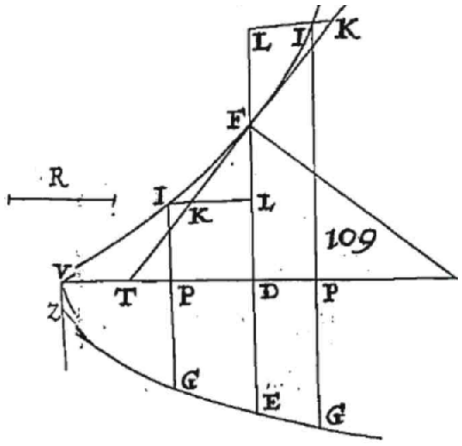



Figura 4: Ilustración de Barrow para la demostración del TFC, [5]

Dado que

$$\frac{FL}{KL} = \frac{DF}{TD} = DE$$

si se denota, por ejemplo, el área de la región $VDEZ$ con $\mathcal{A}(VDEZ)$ y se toma $R = 1$ se sigue que

$$\mathcal{A}(VDEZ) = FD \cdot R = FD$$

$$\mathcal{A}(VPGZ) = PI = LD$$

$$\mathcal{A}(PDEG) = FD = LD = FL.$$

Por otro lado, para el área de rectángulo determinado por $PD$ y $DE$ se tiene que

$$\mathcal{A}(VDEZ) < PD \cdot DE$$

y por tanto

$$FL < PD \cdot DE$$

es decir

$$DE > \frac{FL}{PD}$$

lo que implica que

$$\frac{FL}{KL} > \frac{FL}{PD}$$

o de manera equivalente

$$FL < PD = IL.$$

Utilizando un argumento semejante cuando el punto $I$ está a la derecha de $F$, se obtiene que

$$KL > PD = IL$$

con lo cual se concluye que la recta $FT$ está siempre debajo de la curva $VIF$, es decir, la recta $FT$ es tangente a la curva $VIF$ en el punto $F$ y su pendiente es $DE$. □

## 3 El resultado de Barrow y el Teorema Fundamental del Cálculo

En la terminología actual podemos interpretar el resultado de Barrow de la siguiente manera. Sea $y = f(x)$ una función continua y decreciente (creciente) en el intervalo $[a, x]$ y consideremos el área bajo $f$ en dicho intervalo, la cual está definida por la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

Si en la Figura 5, se consideran los puntos

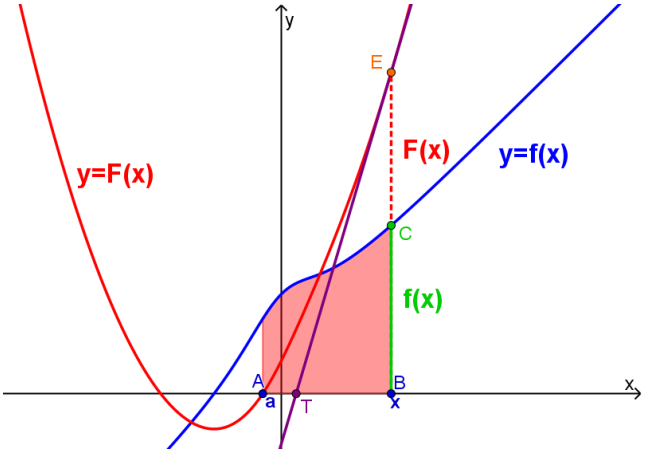



Figura 5: Ilustración geométrica del resultado de Barrow.

$C(x, f(x)), E(x, F(x))$ y el punto $T$ como en la Proposición XI de la Lección X de Barrow, es decir,

$$\frac{BE}{TB} = BC$$

entonces $BE = F(x)$, el punto $T$ tiene como coordenadas $(x - TB, 0) = (x - \frac{F(x)}{f(x)}, 0)$, la recta $ET$ tiene como ecuación

$$y = f(x)t - xf(x) + F(x)$$

y es tangente a la curva $y = F(x)$ en el punto $E$ y su pendiente es $m = BC = f(x)$ y puesto que la pendiente de la recta tangente a una curva es su derivada se tiene que

$$\frac{dF(x)}{dx} = BC = f(x).$$

es decir,

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\, dx\right) = f(x).$$

expresión que corresponde al TFC.

## 4 Una recreación de la Proposición XI, Lección X en GeoGebra

En esta sección se considera la implementación en GeoGebra del proceso contemplado en la proposición XI de la Lección X de I. Barrow, la cual ilustra su versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo. El algoritmo desarrollado es el siguiente.

- Definir una función $y = f(x)$ continua y decreciente en un intervalo $[a, b]$ donde $a$ y $b$ son las abscisas de dos puntos $A$ y $B$ sobre el eje $x$. En este caso se han considerado $f(x) = 2e^{-x/10}$ y los puntos $A(0, 0)$ y $B(4, 0)$.
- Calcular el área bajo la gráfica de $f$ en el intervalo $[a, b]$. Esto se obtiene escribiendo desde la barra de entrada **`Integral(f, a, b)`**.
- Construir un segmento $BE$ perpendicular al eje $x$ en $x = b$ que tenga como longitud el valor numérico del área bajo $f$ en el intervalo en consideración.
- Trazar el lugar geométrico de $E$ cuando se mueve el punto $B$ sobre el eje $x$ a través de la sintaxis **`LugarGeométrico(E, B)`**.
  La curva resultante tiene la propiedad de que la ordenada de cada uno de sus puntos es numéricamente igual al área bajo $f$ entre $a$ y la abscisa del punto en consideración.
- Sobre el segmento $BE$ construir otro segmento $BC$ de manera que la ordenada del punto $C$ sea $f(b)$.
- Definir sobre el eje $x$ un punto $T$ que satisfaga la relación

$$\frac{BE}{BC} = TB$$

- Trazar la recta $TE$.

Por lo considerado en la sección 2, la recta $ET$ es la tangente a la función $y = F(x)$ que define la curva con la propiedad de que, en cada punto, su ordenada corresponde al valor numérico del área bajo la gráfica de $f$.

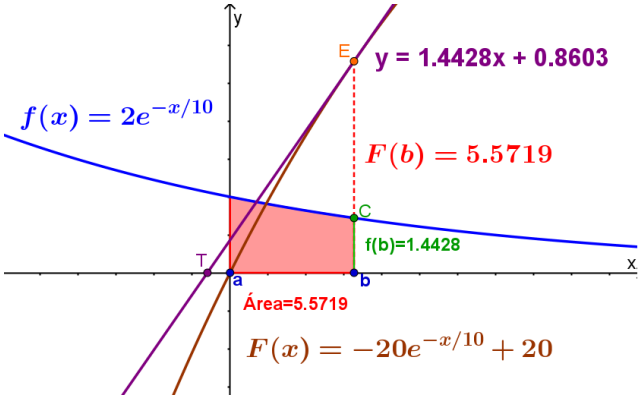



Figura 6: Ilustración en GeoGebra del TFC según Barrow.

La Figura 6 ilustra este algoritmo. En la dirección https://www.geogebra.org/m/vnu7euyg se puede revisar esta actividad en la cual se han considerado detalles adicionales. En la misma, al mover el punto $B$ es posible observar que el valor de $f(b)$ y el valor de la pendiente de la recta tangente a la función $y = F(x)$ son iguales. Cómo la derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente a la función y la integral definida de una función representa el área bajo la gráfica de la función en el intervalo en consideración entonces lo que muestra la Figura 6 expresado de manera simbólica permite verificar que

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x).$$

es decir, el Teorema Fundamental del Cálculo.

## 5 Una observación a la ilustración gráfica de la Proposición XI Lección X

Esta sección está dedicada a analizar una probable inconsistencia en la gráfica que ilustra la demostración geométrica del TFC de I. Barrow en la Proposición XI de sus *Lectiones Geometricae* para lo cual se ubica la misma en un sistema de coordenadas cartesianas de dos maneras diferentes, veamos esto.

### *5.1 La recta $VD$ coincide con el eje $x$.*

Si se sitúa una simplificación de la Figura 3 sobre un sistema coordenado, de manera que la recta $VD$ coincida con el eje $x$ y la recta $VZ$ con el eje $y$ (ver Figura 7), es posible describir las características de la función $y = f(x)$ en dicha imagen, estas son:

- Para $x \geq 0$, la función $y = f(x)$ está debajo del eje $x$, corta al eje $y$ en un punto, es cóncava hacia arriba y es decreciente.
- Para $x \geq 0$, su integral, es decir la función, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, está arriba del eje $x$, es creciente, es cóncava hacia arriba y pasa por el origen.

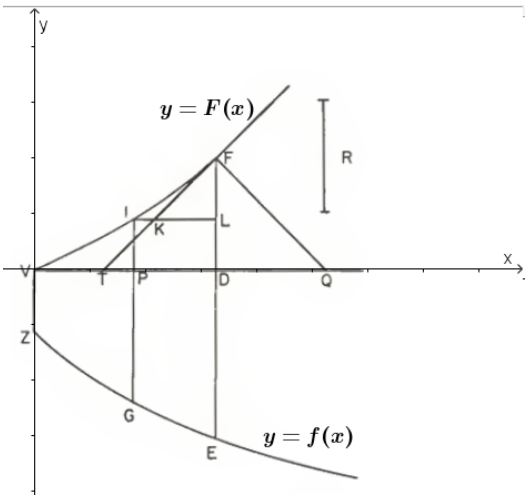



Figura 7: La ilustración de Barrow con $VD$ sobre el eje $x$. Adaptado de [6].

La probable inconsistencia comentada radica en lo siguiente: Al intentar construir con un software de geometría dinámica (como GeoGebra) la gráfica de una función $f$ que satisfaga estas características ¿se obtiene una gráfica que coincide con

la anterior? Los experimentos numéricos realizados sugieren que la respuesta es negativa ya que como se observa, se pueden satisfacer las propiedades de $f$ pero no las de su integral. Por ejemplo, la Figura 8) ilustra la función $f(x) = e^{-x} - 3$ la cual satisface las características que debe cumplir la función $f$; sin embargo, su integral, la función $F(x) = -e^{-x} - 3x + 1$ no satisface algunas de sus propiedades, por ejemplo, no es positiva para $x \geq 0$.

¿Desde el punto de vista matemático es posible construir una

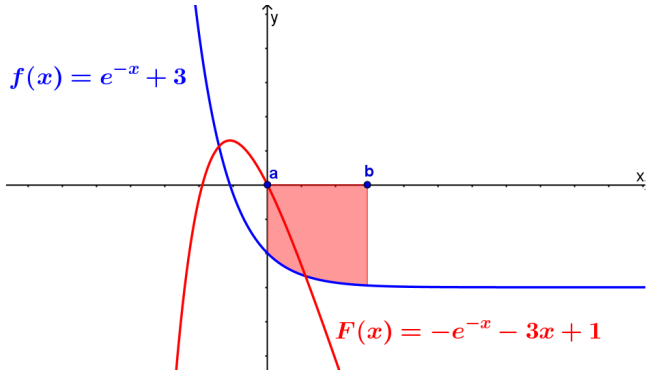



Figura 8: Un ejemplo de una función $y = f(x)$ que no satisface las propiedades requeridas.

función con estas características? La respuesta es negativa como lo muestra la siguiente proposición. No existe una función $y = f(x)$ diferenciable para $x > 0$ que satisfaga las propiedades enunciadas anteriormente.

*Proof.* La prueba consiste en mostrar que por lo menos dos de las características asociadas a la función $y = f(x)$ y a su integral son incompatibles; veamos esto.

[label=a)]

1. Es un hecho conocido que $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ y puesto que $y = F(x)$ debe ser creciente entonces $\frac{dF(x)}{dx} \geq 0$, es decir $f(x) \geq 0$ (Absurdo) ya que una de las características que debe cumplir $f$ es que es negativa para $x \geq 0$.

2. Se conoce que $\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{df(x)}{dx}$, pero $y = F(x)$ debe ser cóncava hacia arriba para $x > 0$ esto significa que $\frac{d^2F(x)}{dx^2}) \geq 0$, es decir, $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ (Absurdo) ya que $y = f(x)$ es decreciente para $x \geq 0$ y por tanto $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ para $x > 0$.
   La única posibilidad para que se cumpla simultáneamente que $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$ y $\frac{df(x)}{dx} \leq 0$ es que $\frac{df(x)}{dx} = 0$ lo que implica que $f$ es constante, pero esto es imposible ya que $f$ es decreciente.
   En consecuencia, no existe una función $y = f(x)$ que satisfaga simultáneamente todas estas propiedades.

De manera explícita, las condiciones "debajo del eje $x$" y "estrictamente decreciente" para $y = f(x)$ son incompatibles con las condiciones "arriba del eje $x$", "creciente" y ´´cóncava hacia arriba" para $y = F(x)$. □

*5.2 La recta $VD$ es paralela al eje $x$.*

Se ubica la Figura 3 sobre un sistema coordenado, de manera que el área de las regiones consideradas sea positiva. esto se logra cuando la recta $VD$ coincide con una recta paralela al eje $x$ ubicada por encima del mismo y la recta $VZ$ con el eje $y$ (ver Figura 9), las características de la función $y = f(x)$ son las siguientes:

[label=b)]

1. Para $x \geq 0$, la función $y = f(x)$ está entre las rectas $y = 0$ y $y = k$, corta al eje $y$ en un punto arriba del eje $x$, es cóncava hacia arriba y decreciente.

2. Para $x \geq 0$, su integral, es decir la función, $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, está arriba de la recta $y = k$, es creciente, es cóncava hacia arriba y pasa por el punto $(0, k)$.

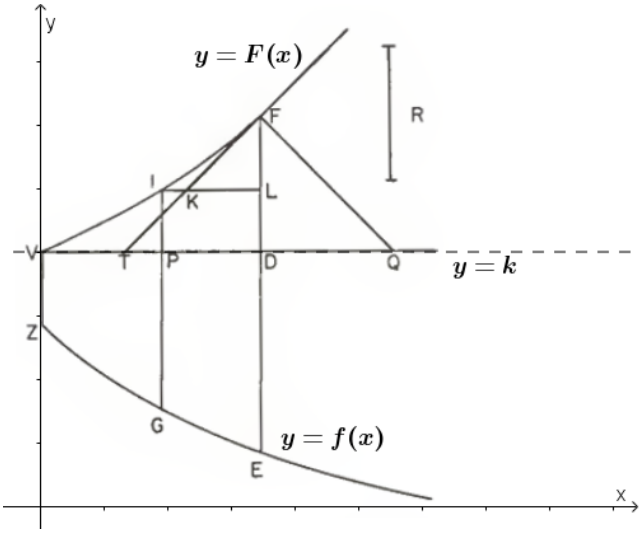



Figura 9: La ilustración de Barrow con $VD$ sobre una recta paralela al eje $x$. Adaptado de [6].

La Figura 10 ilustra la función $f(x) = 4e^{-x/10}$ la cual satisface las características pedidas para $f$ pero la integral la función $F(x) = -40e^{-x/10} + 46$ no cumple una de estas propiedades ya que no es cóncava hacia arriba para $x > 0$.

¿Desde el punto de vista matemático es posible construir una

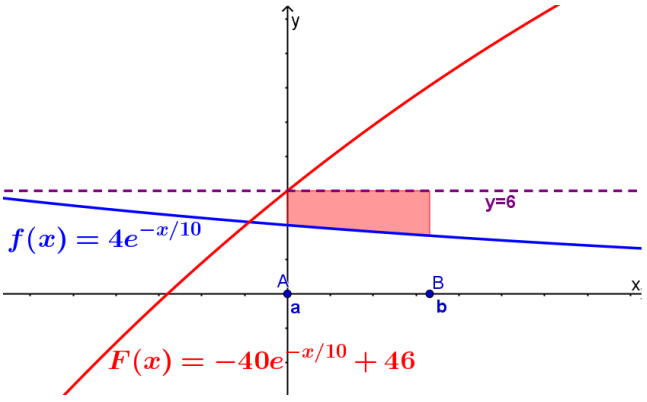



Figura 10: La función $y = f(x)$ que no satisface las características solicitadas.

función con estas características? La respuesta es negativa como lo muestra la siguiente proposición. No existe una función $y = f(x)$ diferenciable para $x > 0$ que satisfaga las propiedades enunciadas anteriormente.

*Proof.* La demostración es análoga a la considerada en la proposición anterior, en este caso se muestra que existe una contradicción en las condiciones que relacionan la primera derivada para la función y su integral. La función $f$ debe ser decreciente para $x > 0$ esto significa que $\frac{df(x)}{dx} < 0$ en el intervalo $(0, +\infty)$ y como su integral $F$ debe ser cóncava hacia arriba entonces $\frac{d^2F(x)}{dx^2} = \frac{df(x)}{dx} > o$ para $x > 0$, lo cual es contradictorio. En consecuencia, no existe una función $y = f(x)$ que satisfaga simultáneamente todas estas propiedades. □

## 6 Implicaciones y aplicaciones didácticas

El análisis histórico-epistemológico y la modelación dinámica desarrollados en las secciones anteriores ofrecen un marco para enriquecer la enseñanza del cálculo diferencial e integral. En particular, permiten diseñar secuencias de aprendizaje fundamentadas en la historia de las matemáticas y en la conversión entre registros de representación semiótica, un enfoque que, como señalan Zubieta y Meza [8], permite articular las ideas geométricas originales de Isaac Barrow con la formulación analítica contemporánea del Teorema Fundamental del Cálculo. En el aula, el docente puede proponer actividades en las que los estudiantes traduzcan los argumentos geométricos de la Proposición XI de Barrow a la notación algebraica y funcional moderna, identificando cómo las magnitudes de los segmentos, los triángulos característicos y las ordenadas estrictamente positivas corresponden a los conceptos actuales de área, derivada e integral definida. Esta articulación entre el razonamiento sintético euclidiano y el lenguaje analítico contemporáneo contribuye a superar la enseñanza netamente algorítmica de la regla de Barrow, dotando de significado visual y conceptual a la relación inversa entre los problemas de tangentes y cuadraturas.

Complementariamente, se sugiere implementar talleres de exploración gráfica mediados por software de geometría dinámica como GeoGebra, en los que los estudiantes reconstruyan el diagrama histórico a partir de funciones explícitas, tales como $f(x) = -3e^{-x/10} + 4$. Mediante el uso de deslizadores y el rastro de objetos geométricos, los estudiantes pueden analizar de forma activa cómo el crecimiento de la curva original determina la concavidad de la curva que representa el área y la pendiente de su recta tangente. Tal como evidencia Zengin [9], la mediación con software dinámico en entornos colaborativos facilita que los estudiantes construyan múltiples representaciones y formulen argumentaciones deductivas para validar visual y simbólicamente la demostración del TFC. Este tipo de tareas fomenta el pensamiento crítico frente a las representaciones visuales, permitiendo que los estudiantes distingan entre un esquema geométrico orientador del siglo XVII y una gráfica cartesiana a escala, lo cual fortalece su comprensión del Teorema Fundamental del Cálculo.

## 7 Conclusiones

- Este trabajo examina la versión geométrica del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) propuesta por Isaac Barrow en el siglo XVII. Utiliza la teoría de las representaciones semióticas y software de geometría dinámica, para interpretar el carácter geométrico de los problemas de áreas y tangentes que estableció la relación inversa entre derivada e integral.

- El desarrollo actual del cálculo, se debe al trabajo independiente de I. Newton y G. W. Leibniz. Apoyados en concepciones diferentes, Newton desde un enfoque cinemático basado en sus fluxiones y fluentes, y Leibniz en términos de sumas de magnitudes infinitamente pequeñas, construyeron un corpus debidamente coherente que sintetizó el trabajo desarrollado, desde 1630, alrededor de los cuatro problemas fundamentales considerados en la sección 1. El cálculo representó la consolidación de un proceso continuo que tiene sus raíces en el método de exhaución de Eudoxo de Cnido y Arquímedes, cuya expansión se realizó en el siglo XVIII por matemáticos como L. Euler. La fundamentación lógica y rigurosa de esta disciplina ocurrió en el Siglo XIX, gracias a la formulación precisa de conceptos básicos de análisis como función, límite, continuidad y derivada. A. Cauchy y posteriormente K. Weierstrass lograron despojar el cálculo de su dependencia de la intuición geométrica, posibilitando que Cauchy formulara y demostrara de manera rigurosa el Teorema Fundamental del Cálculo.

- La versión geométrica del TFC de I. Barrow no es la que usualmente se presenta en los libros de texto y en el desarrollo de los cursos de cálculo en las aulas escolares, en su lugar se estudia una transposición didáctica que se fundamenta en los trabajos de A. Cauchy del siglo XIX. Este enfoque moderno reduce la relación entre la derivada y la integral al algoritmo de cálculo de integrales definidas que se conoce como la regla de Barrow; esta regla utiliza una notación algebraica y el concepto de función que difieren completamente de los métodos geométricos e infinitesimales utilizados por Barrow en sus trabajos.

- ¿La existencia de una aparente imprecisión en el diagrama de la Proposición XI (Lección X) tiene implicaciones sobre la validez de la demostración de Barrow? De ninguna manera. En el contexto de la geometría del siglo XVII, los diagramas no eran representaciones exactas a escala, sino que se consideraban esquemas representativos para orientar los pasos lógicos de la demostración. El razonamiento deductivo de Barrow se sostiene de forma autónoma a través de relaciones geométricas consideradas, es decir, de las propiedades de las tangentes y los rectángulos construidos. Por tanto, cualquier falta de correspondencia con el cálculo moderno en el trazado de las curvas es un detalle meramente ilustrativo que no invalida ni afecta el rigor del descubrimiento de la relación inversa entre el área y la tangente.

- ¿Existe una inconsistencia en el diagrama de Barrow? Desde una perspectiva geométrica rigurosa, no existe tal inconsistencia. La dificultad para reproducir el diagrama de forma analítica con herramientas modernas como GeoGebra radica en que Barrow operaba bajo el paradigma de la geometría clásica, donde las ordenadas de ambas curvas se consideran magnitudes estrictamente positivas. Para evitar la superposición visual de los trazos, Barrow representó la curva a integrar $ZGE$ por debajo de la recta de referencia $VD$. En términos de la notación actual,

si se define el eje $x$ con origen en $V$ la curva inferior representa una función continua y positiva $y = f(x)$ que es creciente, es decir, $\frac{df(x)}{dx} \geq 0$. Consecuentemente, la curva superior $VIF$ que representa el área bajo $ZGE$ escalada por una constante $R$ posee una tasa de cambio creciente, lo que la convierte matemáticamente en una función cóncava hacia arriba. Este comportamiento es perfectamente reproducible con la notación moderna; por ejemplo, la función $f(x) = -3e^{-x/10} + 4$ satisface las condiciones de positividad, crecimiento y concavidad requeridas para validar de manera geométrica la construcción de la tangente $TE$ propuesta por Barrow.

## References


[1] J. C. Ponce Campuzano, "Isaac barrow y su versión geométrica del teorema fundamental del cálculo," *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 83, pp. 123–130, 2013. Disponible en: https://unirioja.es.

[2] P. Collette, *Historia de las matemáticas II*. Siglo Veintiuno Editores., 2000.

[3] F. J. Pérez González, *Cálculo Diferencial e Integral de Funciones de una Variable*. Granada: Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, 2006. Disponible en: http://handle.net.

[4] C. B. BOYER, "Historia de la matemática–madrid," *Alianza Universidad Textos*, 1986.

[5] J. M. Child, "The geometrical lectures of isaac barrow," *The Open Court Publishing Company*, 1916.

[6] D. Struik, "A source book in mathematics, 1200-1800, harvard univ," *Pr., Cambridge, MA*, 1969. DOI: https://10.1515/9781400858002.org.

[7] V. J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*. Boston: Addison-Wesley, 3rd ed., 2009. Disponible en: https://mcgill.ca.

[8] G. Z. Badillo, "El teorema fundamental del cálculo: una versión contemporánea y la otra basada en las ideas de i. barrow, utilizando geogebra," *El cálculo y su enseñanza*, vol. 18, no. 1, pp. 53–60, 2022. DOI: https://10.61174/recacym.v18i1.188.org.

[9] Y. Zengin, "Construction of proof of the fundamental theorem of calculus using dynamic mathematics software in the calculus classroom," *Education and Information Technologies*, vol. 27, no. 2, pp. 2331–2366, 2022. DOI: https://10.1007/s10639-021-10666-1.org.